This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

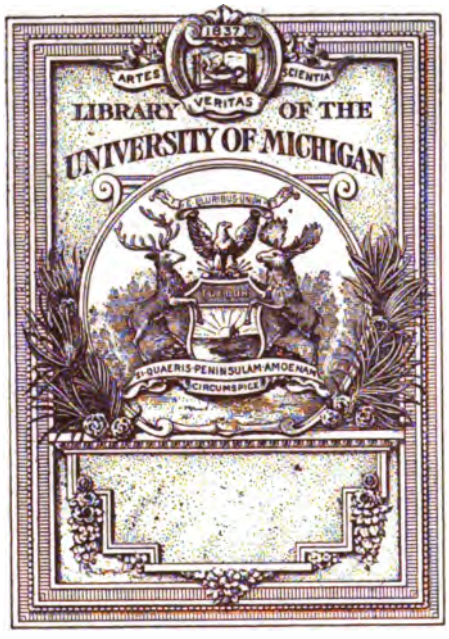
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

STORAGE
1 n 8
QA
913
.F33
B 449546



THE GIFT OF
Prof. Alex. Ziwet.

Alexander Ziwet

Ueber die

Bewegung eines festen Körpers

in einer

tropfbaren Flüssigkeit.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

bei

hoher philosophischer Facultät der Universität zu Marburg

eingereicht von

Ludwig Fennel

aus Cassel.

Marburg 1888.

QA
913
.F33

Gift of
Prof. A. Ziwet
Sept, 13 1906

Druck von Weber & Weidemeyer in Cassel.

Seinem hochverehrten Lehrer

Herrn Professor Dr. Heinrich Weber

in dankbarer Hochachtung

gewidmet

vom Verfasser.

170874

Unter der Voraussetzung, dass die Bewegung eines festen Körpers in einer tropfbaren Flüssigkeit ohne Reibung vor sich geht, sind die Differentialgleichungen dieses Problems zuerst von Euler und in anderer Form von Lagrange aufgestellt worden. Dieselben sind unter den Namen der Euler'schen und Lagrange'schen hydrodynamischen Gleichungen bekannt.

Allein lange Zeit hindurch war eine Integration dieser Gleichungen, selbst unter den einfachsten und beschränkendsten Annahmen, nicht vollzogen worden, so dass Navier[1]) glaubte, es habe dies seinen Grund in der Unvollkommenheit der bekannten Integrationsmethoden, welche nicht einmal für den Fall des einfachst gestalteten Körpers — der Kugel — und einer unzusammendrückbaren Flüssigkeit von unendlicher Ausdehnung auszureichen schienen.

In der Gesammtsitzung der Berliner Akademie vom 8. Januar 1852 teilte jedoch Lejeune Dirichlet[2]) mit, dass die Meinung Naviers grundlos sei, da sich das Problem vollständig behandeln lasse, sobald der feste Körper die Gestalt einer Kugel oder eines Ellipsoids habe und falls seine Dichte constant oder bei der Kugel in concentrischen Schalen constant sei. Er gab die Lösung vollständig für den ersten Fall, die Kugel.

Hieran anknüpfend, behandelte Clebsch die allgemeine Aufgabe im 52. Bande des Crelleschen Journals und gab die Integration der hydrodynamischen Gleichungen unter der Annahme, dass der feste Körper ein homogenes Ellipsoid ist.

Ferner beschrieb Hoppe im 93. Bande von Poggendorffs Annalen die Bewegung eines Rotationskörpers in der Richtung seiner Axe.

In ein neues Stadium trat dies Problem dadurch, dass Thomson und Tait[3]) die Differentialgleichungen der Bewegung des festen Körpers aus dem Hamiltonschen Princip ableiteten und die Integration derselben für die einfachsten Fälle ausführten. Sie beschrieben die Bewegung eines Rotationskörpers unter der beschränkenden Annahme, dass sich derselbe um seine Rotationsaxe nicht dreht und diese eine feste Ebene nicht verlässt.

G. Kirchhoff hat dann im 71. Bande von Crelles Journal den Differentialgleichungen der Bewegung eine äusserst elegante Gestalt gegeben. Die Bedingungen unter denen er dieselben aufgestellt hat, sind diese.

Es bewegt sich ein fester Körper von beliebiger Gestalt und beliebig verteilter Masse reibungslos in einer tropfbaren, homogenen, unzusammendrückbaren Flüssigkeit von unendlicher

---

[1]) Résumé des leçons de Mécanique données à l'Ecole polytechnique par Mr. Navier. pag. 480.

[2]) Verhandlungen der Königl. Preuss. Akademie zu Berlin. 1852.

[3]) Treatise on natural philosophy, Oxford 1867, pag. 264. Deutsch: Handbuch der theoretischen Physik I, 1. § 333.

Ausdehnung, auf deren Teilchen keine Kräfte wirken und in welcher keine Wirbelbewegungen stattfinden. Die Geschwindigkeiten der Flüssigkeitsteilchen sollen stetige Functionen des Orts sein, und die auf den Körper wirkenden Kräfte sollen ein Potential besitzen, das nur von der Lage des Körpers abhängt. Der Bewegungszustand des ganzen Systems soll aus dem Zustande der Ruhe hervorgegangen sein durch Kräfte, die auf den Körper wirkten.

Um das System der unter diesen Gesichtspunkten aufgestellten Differentialgleichungen integriren zu können, nimmt dann Kirchhoff weiter an, dass die auf den festen Körper einwirkenden beschleunigenden Kräfte verschwinden.

Es sollen für diesen Fall die Differentialgleichungen nebst ihren von Kirchhoff ermittelten Integralen angeführt werden.

Das Coordinatensystem der ξ, η, ζ sei ein im Raume festes; das der x, y, z sei ein im Körper festes und dem Systeme der ξ, η, ζ congruent. Es ist dann:

$$(1)\quad \begin{aligned} \xi &= \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z \\ \eta &= \beta + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z \\ \zeta &= \gamma + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z, \end{aligned}$$

wo

α, β, γ die ξ, η, ζ Coordinaten des Punktes ($x = 0$, $y = 0$, $z = 0$) und α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3, γ_1, γ_2, γ_3 die 9 Richtungscosinus der beiden Axenkreuze zur Zeit t sind.

Die Bewegung des Körpers wird vollständig bestimmt sein, sobald man diese 12 Coefficienten in Functionen der Zeit dargestellt hat. Diese Darstellung ist mithin das Ziel der Untersuchung.

Es ist nämlich:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \cos(x,\xi) & \alpha_2 &= \cos(y,\xi) & \alpha_3 &= \cos(z,\xi) \\ \beta_1 &= \cos(x,\eta) & \beta_2 &= \cos(y,\eta) & \beta_3 &= \cos(z,\eta) \\ \gamma_1 &= \cos(x,\zeta) & \gamma_2 &= \cos(y,\zeta) & \gamma_3 &= \cos(z,\zeta) \end{aligned}$$

und da beide Coordinatensysteme congruent sind:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 1.$$

Zwischen diesen 9 Richtungscosinus bestehen Gleichungen, die ihre gegenseitige Abhängigkeit ausdrücken und die der Vollständigkeit halber hier angeführt werden sollen. Diese sind:

$$(2)\quad \begin{aligned} \alpha^2_1 + \alpha^2_2 + \alpha^2_3 &= 1 & \alpha^2_1 + \beta^2_1 + \gamma^2_1 &= 1 \\ \beta^2_1 + \beta^2_2 + \beta^2_3 &= 1 & \alpha^2_2 + \beta^2_2 + \gamma^2_2 &= 1 \\ \gamma^2_1 + \gamma^2_2 + \gamma^2_3 &= 1 & \alpha^2_3 + \beta^2_3 + \gamma^2_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$(3)\quad \begin{aligned} \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 &= 0 & \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 &= 0 \\ \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \gamma_3\alpha_3 &= 0 & \alpha_3\alpha_1 + \beta_3\beta_1 + \gamma_3\gamma_1 &= 0 \\ \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 &= 0 & \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$(4)\quad \begin{aligned} \alpha_1 &= \beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2 & \alpha_2 &= \beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3 & \alpha_3 &= \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 \\ \beta_1 &= \gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\alpha_2 & \beta_2 &= \gamma_3\alpha_1 - \gamma_1\alpha_3 & \beta_3 &= \gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1 \\ \gamma_1 &= \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 & \gamma_2 &= \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 & \gamma_3 &= \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1. \end{aligned}$$

Die Geschwindigkeitscomponenten eines Punktes nach den Richtungen der x, y, z seien bezüglich u, v, w. Ihre Definitionsgleichungen lauten dann, falls das D die Differentitation nach der Zeit andeutet:

$$
(5)\quad \begin{aligned} u &= \alpha_1 \,.\, D\alpha + \beta_1 \,.\, D\beta + \gamma_1 \,.\, D\gamma \\ v &= \alpha_2 \,.\, D\alpha + \beta_2 \,.\, D\beta + \gamma_2 \,.\, D\gamma \\ w &= \alpha_3 \,.\, D\alpha + \beta_3 \,.\, D\beta + \gamma_3 \,.\, D\gamma. \end{aligned}
$$

Eine Folge dieser Gruppe ist das System:

$$
(6)\quad \begin{aligned} D\alpha &= \alpha_1\, u + \alpha_2\, v + \alpha_3\, w \\ D\beta &= \beta_1\, u + \beta_2\, v + \beta_3\, w \\ D\gamma &= \gamma_1\, u + \gamma_2\, v + \gamma_3\, w. \end{aligned}
$$

Die Componenten der Rotationsgeschwindigkeit nach den Axen der x, y z zur Zeit t seien bezüglich p, q, r. Später werden mit p', q', r' die Componenten derselben Rotationsgeschwindigkeit genommen nach den Axen ξ, η, ζ bezeichnet werden.

Es bestehen dann die Gleichungen:

$$
(7)\quad \begin{aligned} D\alpha_1 &= q\alpha_3 - r\alpha_2 & D\alpha_2 &= r\alpha_1 - p\alpha_3 & D\alpha_3 &= p\alpha_2 - q\alpha_1 \\ D\beta_1 &= q\beta_3 - r\beta_2 & D\beta_2 &= r\beta_1 - p\beta_3 & D\beta_3 &= p\beta_2 - q\beta_1 \\ D\gamma_1 &= q\gamma_3 - r\gamma_2 & D\gamma_2 &= r\gamma_1 - p\gamma_3 & D\gamma_3 &= p\gamma_2 - q\gamma_1. \end{aligned}
$$

Die kinetische Energie T des ganzen Systems ist, wie Kirchhoff gezeigt hat, eine homogene Function zweiten Grades der 6 Veränderlichen u, v, w, p, q, r, deren 21 Constanten sich additiv aus zwei Gliedern zusammensetzen, von denen das eine von der Gestalt der Oberfläche des festen Körpers und der Dichte der Flüssigkeit, das andere von der Art der Massenverteilung im Innern des Körpers abhängt. Man hat somit:

$$
(8)\quad \begin{aligned} 2T = c_{11}\, u^2 &+ 2c_{12}\, uv + 2c_{13}\, uw + 2c_{14}\, up + 2c_{15}\, uq + 2c_{16}\, ur \\ &+ c_{22}\, v^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad + c_{55}\, q^2 + 2c_{56}\, qr \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + c_{66}\, r^2. \end{aligned}
$$

Die von Kirchhoff aufgestellten Differentialgleichungen lauten unter Ausschluss beschleunigender Kräfte:

$$
(9)\quad \begin{aligned} D\frac{\partial T}{\partial u} &= q\frac{\partial T}{\partial w} - r\frac{\partial T}{\partial v} \\ D\frac{\partial T}{\partial v} &= r\frac{\partial T}{\partial u} - p\frac{\partial T}{\partial w} \\ D\frac{\partial T}{\partial w} &= p\frac{\partial T}{\partial v} - q\frac{\partial T}{\partial u} \end{aligned}
\qquad
(10)\quad \begin{aligned} D\frac{\partial T}{\partial p} &= v\frac{\partial T}{\partial w} - w\frac{\partial T}{\partial v} + q\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial q} \\ D\frac{\partial T}{\partial q} &= w\frac{\partial T}{\partial u} - u\frac{\partial T}{\partial w} + r\frac{\partial T}{\partial p} - p\frac{\partial T}{\partial r} \\ D\frac{\partial T}{\partial r} &= u\frac{\partial T}{\partial v} - v\frac{\partial T}{\partial u} + p\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial p}. \end{aligned}
$$

Diese Differentialgleichungen werden befriedigt durch $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$ und falls u, v, w Constanten sind, welche der Gleichung genügen:

$$
u : v : w = \frac{\partial T}{\partial u} : \frac{\partial T}{\partial v} : \frac{\partial T}{\partial w}.
$$

Aus dieser particulären Lösung zieht Kirchhoff dann den Schluss, dass es für jeden Körper 3 und im Allgemeinen nur 3 zu einander senkrechte Richtungen gibt, in denen derselbe in der Flüssigkeit fortschreiten kann, ohne sich zu drehen.

Als Integrale dieser Systeme gibt er an:

$$(11)\quad 2T = h$$

$$(12)\quad \begin{aligned} \alpha_1 \frac{\partial T}{\partial u} + \alpha_2 \frac{\partial T}{\partial v} + \alpha_3 \frac{\partial T}{\partial w} &= k \\ \beta_1 \frac{\partial T}{\partial u} + \beta_2 \frac{\partial T}{\partial v} + \beta_3 \frac{\partial T}{\partial w} &= k' \\ \gamma_1 \frac{\partial T}{\partial u} + \gamma_2 \frac{\partial T}{\partial v} + \gamma_3 \frac{\partial T}{\partial w} &= k'' \end{aligned} \qquad (13)\quad \begin{aligned} \alpha_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \alpha_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \alpha_3 \frac{\partial T}{\partial r} &= l + \beta k'' - \gamma k' \\ \beta_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \beta_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \beta_3 \frac{\partial T}{\partial r} &= l' + \gamma k - \alpha k'' \\ \gamma_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \gamma_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \gamma_3 \frac{\partial T}{\partial r} &= l'' + \alpha k' - \beta k \end{aligned}$$

wo h, k, k', k'', l, l', l'' willkürliche Constanten sind. Aus diesen beiden Gruppen folgen auch die Gleichungen:

$$(14)\quad \left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial w}\right)^2 = k^2 + k'^2 + k''^2$$

$$(15)\quad \frac{\partial T}{\partial u} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} + \frac{\partial T}{\partial v} \cdot \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial T}{\partial w} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} = kl + k'l' + k''l''.$$

Liegt ein Körper vor, der in Rücksicht auf Gestalt und Massenverteilung mindestens zwei Paare aufeinander senkrecht stehender Symmetrieebenen besitzt, welche alle durch die x Axe gehen, so nimmt — bei passender Wahl des Coordinatenursprungs auf der x Axe — der Ausdruck für die doppelte kinetische Energie des ganzen Systems die Form an:

$$(16)\quad 2T = Ap^2 + B(q^2 + r^2) + A_1 u^2 + B_1 (v^2 + w^2).$$

Für solche Körper, die nach Gestalt und Massenverteilung den Charakter eines Rotationskörpers besitzen, hat Kirchhoff das Problem weiter behandelt und gezeigt, dass es auf die Umkehrung elliptischer Functionen führt.

In zwei speciellen Fällen hat er dasselbe vollständig zu Ende geführt; nämlich in dem Falle, dass der Körper um seine Rotationsaxe nicht rotirt und diese Axe eine feste Ebene nicht verlässt, und zweitens, falls ein Punkt der Rotationsaxe eine Schraubenlinie beschreibt. Anknüpfend an diese Kirchhoff'sche Abhandlung, ist von Köpke[1]) der allgemeine Fall der Bewegung eines Rotationskörpers insofern erledigt worden, als er alle veränderlichen Coefficienten in Functionen der Zeit mit Hilfe von Thetafunctionen darstellt und die Aufgabe so der numerischen Berechnung zugänglich machte.

Diese Köpke'schen Formeln sind dann von Schülke[2]) vereinfacht worden, und es ist gezeigt, wie man durch kleine Umformungen der Kirchhoff'schen Gleichungen in allen Fällen eine deutliche Vorstellung des Bewegungsvorganges gewinnen kann.

Clebsch hat im 3. Bande der Mathematischen Annalen das System der Kirchhoff'schen Differentialgleichungen einer genaueren Betrachtung unterzogen und drei neue Fälle angegeben, in denen das Problem auf Quadraturen zurückgeführt werden kann.

---

[1]) Mathematische Annalen XII. Band, pag. 387.

[2]) Inaugural-Dissertation, Königsberg 1882.

Im 14. Bande der Mathematischen Annalen ist von Herrn Prof. H. Weber eine elegante analytische Darstellung der Bewegung eines festen Körpers, welcher drei zu einander senkrechte Symmetrieebenen besitzt, mittels Thetafunctionen zweier Variabeln gegeben worden. In dem vierten Paragraphen dieser Abhandlung ist gezeigt, wie man zu einer Lösung dieses Problems auch durch die Umkehrung hyperelliptischer Integrale gelangt.

„Auf Grund der in diesem Paragraphen entwickelten Formeln sollen nun alle die Fälle ermittelt und behandelt werden, in denen sich die Bewegung eines festen Körpers vom Charakter des dreiaxigen Ellipsoids durch die Umkehrung elliptischer Integrale, d. h. durch elliptische Functionen und elliptische Transcendenten darstellen lässt.“

Die doppelte kinetische Energie des ganzen Systems ist in diesem Falle:

$$(17)\quad 2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + A_1 u^2 + B_1 v^2 + C_1 w^2$$

es wird:

$$(17^*)\quad \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial p} &= Ap, & \frac{\partial T}{\partial q} &= Bq, & \frac{\partial T}{\partial r} &= Cr; \\ \frac{\partial T}{\partial u} &= A_1 u, & \frac{\partial T}{\partial v} &= B_1 v, & \frac{\partial T}{\partial w} &= C_1 w. \end{aligned}$$

Es ist angenommen, dass zwischen den ihrer Natur nach positiven Constanten des Körpers die Beziehung besteht:

$$(18)\quad AA_1 (C_1 - B_1) + BB_1 (A_1 - C_1) + CC_1 (B_1 - A_1) = 0.$$

Setzt man in den Kirchhoff'schen Integralgleichungen $k' = k'' = 0$, wodurch man über die Richtung der ξ Axe, und ferner $l' = l'' = 0$, wodurch man über die Lage derselben verfügt, — was beides ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit geschehen kann —, so lauten diese Gleichungen 11, 12 und 13:

$$(11)\quad 2T = h$$

$$(12^*)\quad \begin{aligned} A_1 \alpha_1 u + B_1 \alpha_2 v + C_1 \alpha_3 w &= k \\ A_1 \beta_1 u + B_1 \beta_2 v + C_1 \beta_3 w &= 0 \\ A_1 \gamma_1 u + B_1 \gamma_2 v + C_1 \gamma_3 w &= 0 \end{aligned} \qquad (13^*)\quad \begin{aligned} A \alpha_1 p + B \alpha_2 q + C \alpha_3 r &= l \\ A \beta_1 p + B \beta_2 q + C \beta_3 r &= \gamma k \\ A \gamma_1 p + B \gamma_2 q + C \gamma_3 r &= -\beta k. \end{aligned}$$

Die Gleichungen 12* werden befriedigt durch:

$$(19)\quad A_1 . u = k \alpha_1, \quad B_1 . v = k \alpha_2, \quad C_1 . w = k \alpha_3,$$

was aus den Gruppen (2) und (3) leicht ersichtlich ist.

Es ist:

$$(20)\quad k = + \sqrt{A^2_1 u^2_0 + B^2_1 v^2_0 + C^2_1 w^2_0},$$

wo die mit dem Zeiger o versehenen Buchstaben die Geschwindigkeitscomponenten zur Anfangszeit t_0 bedeuten.

Setzt man $l = 0$, was eine Beschränkung der Allgemeinheit ist, so wird aus (13*):

$$(21)\quad A \alpha_1 p + B \alpha_2 q + C \alpha_3 r = 0. \qquad (22)\quad \begin{aligned} A \beta_1 p + B \beta_2 q + C \beta_3 r &= k\gamma, \\ A \gamma_1 p + B \gamma_2 q + C \gamma_3 r &= -k\beta. \end{aligned}$$

Die Differentialgleichungen (10) werden:

$$
\begin{aligned}
A\,Dp &= (C - B)\,qr + k^2 \frac{C_1 - B_1}{C_1\,B_1}\,\alpha_2\,\alpha_3 \\
(23)\quad B\,Dq &= (A - C)\,rp + k^2 \frac{A_1 - C_1}{A_1\,C_1}\,\alpha_3\,\alpha_1 \\
C\,Dr &= (B - A)\,pq + k^2 \frac{B_1 - A_1}{B_1\,A_1}\,\alpha_1\,\alpha_2,
\end{aligned}
$$

als deren Integrale man findet:

$$
\begin{aligned}
\alpha^2_1 &= 1 + \frac{A_1\,C_1\,B}{k^2(A_1 - C_1)}\,q^2 - \frac{B_1\,A_1\,C}{k^2(B_1 - A_1)}\,r^2 \\
(24)\quad \alpha^2_2 &= m + \frac{B_1\,A_1\,C}{k^2(B_1 - A_1)}\,r^2 - \frac{C_1\,B_1\,A}{k^2(C_1 - B_1)}\,q^2 \\
\alpha^2_3 &= n + \frac{C_1\,B_1\,A}{k^2(C_1 - B_1)}\,p^2 - \frac{A_1\,C_1\,B}{k^2(A_1 - C_1)}\,q^2
\end{aligned}
$$

wo l, m, n willkürliche Constanten sind, welche der Bedingung genügen müssen:

$$l + m + n = 1.$$

Es sind nun an Stelle von α_1, α_2, α_3 zwei neue Veränderliche x_1 und x_2, und ferner fünf neue Constanten eingeführt, indem gesetzt wurde:

$$
(25)\quad
\begin{aligned}
\alpha^2_1 &= \frac{\delta_1 - x_1\,.\,\delta_1 - x_2}{\delta_1 - \delta_2\,.\,\delta_1 - \delta_3} \\
\alpha^2_2 &= \frac{\delta_2 - x_1\,.\,\delta_2 - x_2}{\delta_2 - \delta_3\,.\,\delta_2 - \delta_1} \\
\alpha^3_2 &= \frac{\delta_3 - x_1\,.\,\delta_3 - x_2}{\delta_3 - \delta_1\,.\,\delta_3 - \delta_2}
\end{aligned}
\qquad
(26)\quad
\begin{aligned}
l &= \frac{\delta_1 - \delta_4\,.\,\delta_1 - \delta_5}{\delta_1 - \delta_2\,.\,\delta_1 - \delta_3} \\
m &= \frac{\delta_2 - \delta_4\,.\,\delta_2 - \delta_5}{\delta_2 - \delta_3\,.\,\delta_2 - \delta_1} \\
n &= \frac{\delta_3 - \delta_4\,.\,\delta_3 - \delta_5}{\delta_3 - \delta_1\,.\,\delta_3 - \delta_2}
\end{aligned}
$$

Bedeuten μ und ν willkürliche Constanten, so wird allen Anforderungen genügt, wenn man setzt:

$$(27)\quad \delta_1 = \frac{\mu}{A} + \nu, \qquad \delta_2 = \frac{\mu}{B} + \nu, \qquad \delta_3 = \frac{\mu}{C} + \nu.$$

Es soll gewählt werden $\mu > 0$ falls $A > B > C$

$\mu < 0$ falls $A < B < C$,

so dass stets:

$$\delta_1 < \delta_2 < \delta_3.$$

Man findet die Veränderlichen x_1 und x_2 zu jedem reellen Wertsysteme der α_1, α_2, α_3 eindeutig und reell als die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$\frac{\alpha^2_1}{x - \delta_1} + \frac{\alpha^2_2}{x - \delta_2} + \frac{\alpha^3_2}{x - \delta_3} = 0$$

und es liegen die Wurzeln so, dass

$$\delta_1 < x_1 < \delta_2 < x_2 < \delta_3.$$

Die Constanten δ_4 und δ_5 ergeben sich in ähnlicher Weise als Wurzeln der Gleichung:

$$\frac{l}{\delta - \delta_1} + \frac{m}{\delta - \delta_2} + \frac{n}{\delta - \delta_3} = 0.$$

Ihre Wurzeln δ_4 und δ_5 sollen, so gegen x_1 und x_2 liegen, dass

$$(29)\quad x_1 < \delta_4 < x_2 < \delta_5.$$

Es ist dies erforderlich, damit p, q, r reelle Werte erhalten; was die nachstehende Gleichungsgruppe lehrt, die eine Folge der Integralgleichungen (21) und (24) und der Definitionsgleichungen (25) von x_1 und x_2 ist.

Setzt man:

$$\Delta = (\delta_2 - \delta_3)\,(\delta_3 - \delta_1)\,(\delta_1 - \delta_2)$$

$$\sqrt{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ x} = \sqrt{(\delta_1 - x)\,(\delta_2 - x)\,(\delta_3 - x)\,(\delta_4 - x)\,(\delta_5 - x)}$$

so wird:

$$(30)\quad \begin{aligned}
p &= \sqrt{\frac{C_1 - B_1}{A\ B_1\ C_1}} \cdot \frac{k}{\sqrt{\Delta}\,(x_1 - x_2)} \left\{ \sqrt{1,\ 4,\ 5,\ x_1}\,\sqrt{2,\ 3,\ x_2} - \sqrt{1,\ 4,\ 5,\ x_2}\,\sqrt{2,\ 3,\ x_1} \right\} \\
q &= \sqrt{\frac{A_1 - C_1}{B\ C_1\ A_1}} \cdot \frac{k}{\sqrt{\Delta}\,(x_1 - x_2)} \left\{ \sqrt{2,\ 4,\ 5,\ x_1}\,\sqrt{3,\ 1,\ x_2} - \sqrt{2,\ 4,\ 5,\ x_2}\,\sqrt{3,\ 1,\ x_1} \right\} \\
r &= \sqrt{\frac{B_1 - A_1}{C\ A_1\ B_1}} \cdot \frac{k}{\sqrt{\Delta}\,(x_1 - x_2)} \left\{ \sqrt{3,\ 4,\ 5,\ x_1}\,\sqrt{1,\ 2,\ x_2} - \sqrt{3,\ 4,\ 5,\ x_2}\,\sqrt{1,\ 2,\ x_1} \right\}
\end{aligned}$$

Die Gleichungen (7) bestimmen p, q, r eindeutig. Durch Eintragung der Werte p, q, r, α_1, α_2, α_3 aus den Gruppen (25) und (30) in die Gruppe (7) findet man:

$$(31)\quad \begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= \frac{2\,k\sqrt{\lambda}}{\mu\,(x_1 - x_2)}\,R\,(x_1)\,(x_2 - \nu) \\
\frac{dx_2}{dt} &= \frac{2\,k\sqrt{\lambda}}{\mu\,(x_2 - x_1)}\,R\,(x_2)\,(x_1 - \nu)
\end{aligned}
\qquad \text{oder: } (31^*)\qquad
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{R\,(x_1)} + \frac{dx_2}{R\,(x_2)} &= \frac{2\,k\sqrt{\lambda}}{\mu}\,dt \\
\frac{x_1\,dx_1}{R\,(x_1)} + \frac{x_2\,dx_2}{R\,(x_2)} &= \frac{2\,k\sqrt{\lambda}}{\mu}\,\nu dt.
\end{aligned}$$

$$\text{Es ist: } R\,(x) = \sqrt{-(\delta_1 - x)\,(\delta_2 - x)\,(\delta_3 - x)\,(\delta_4 - x)\,(\delta_5 - x)}.$$

λ bedeutet eine willkürliche Constante, die wir positiv nehmen, sobald $A_1 < B_1 < C_1$ ist, was ohne Beschränkung der Allgemeinheit vorausgesetzt werden darf.

Es bestehen die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\lambda\,(\delta_2 - \delta_3) &= \frac{A\,(B_1 - C_1)}{B_1\ C_1} = -\lambda\,\mu\,\frac{B - C}{B\ C} \\
\lambda\,(\delta_3 - \delta_1) &= \frac{B\,(C_1 - A_1)}{C_1\ A_1} = -\lambda\,\mu\,\frac{C - A}{C\ A} \\
\lambda\,(\delta_1 - \delta_2) &= \frac{C\,(A_1 - B_1)}{A_1\ B_1} = -\lambda\,\mu\,\frac{A - B}{A\ B}.
\end{aligned}$$

λ und μ hangen mithin derart von einander ab dass:

$$-\lambda\,\mu\,\frac{A_1\ B_1\ C_1}{A\ B\ C} = \frac{A_1\,(B_1 - C_1)}{B - C} = \frac{B_1\,(C_1 - A_1)}{C - A} = \frac{C_1\,(A_1 - B_1)}{A - B}.$$

Durch Integration der Gleichungen (31*) und Umkehrung der auftretenden hyperelliptischen Integrale findet man x_1 und x_2 in Function der Zeit, und kann somit α_1, α_2, α_3, p, q, r als Functionen der Zeit darstellen.

Die Ermittelung der übrigen Unbekannten des Problems erfordert noch zwei Quadraturen. Bezeichnen p', q', r' — wie schon erwähnt — die Componenten der Rotationsgeschwindigkeit nach den Axen der ξ, η, ζ, so hat man:

$$(32)\quad \begin{aligned} p' &= \alpha_1 p + \alpha_2 q + \alpha_3 r \\ q' &= \beta_1 p + \beta_2 q + \beta_3 r \\ r' &= \gamma_1 p + \gamma_2 q + \gamma_3 r \end{aligned} \qquad p'^2 + q'^2 + r'^2 = p^2 + q^2 + r^2.$$

Aus der ersten Gleichung der Gruppe (32) ergibt sich p'; aus den beiden letzten findet man unter Rücksichtnahme auf die Gruppen (4) und (7):

$$r' \, Dq' - q' \, Dr' = D\alpha_1 \, Dp + D\alpha_2 \, Dq + D\alpha_3 \, Dr$$

also:

$$D \operatorname{arctang} \frac{q'}{r'} = \frac{D\alpha_1 \, Dp + D\alpha_2 \, Dq + D\alpha_3 \, Dr}{p^2 + q^2 + r^2 - p'^2}.$$

Durch eine Quadratur wird $\operatorname{arctg} \frac{q'}{r'}$ gefunden; nimmt man die Gleichung hinzu:

$$q'^2 + r'^2 = p^2 + q^2 + r^2 - p'^2,$$

so findet man q und r in Function der x_1 und x_2. Hiernach wiederum erhält man β_1, β_2, β_3, γ_1, γ_2, γ_3 durch Auflösen der linearen Gleichungen:

$$\begin{aligned} \beta_1 D\alpha_1 + \beta_2 D\alpha_2 + \beta_3 D\alpha_3 &= r \\ \beta_1 p + \beta_2 q + \beta_3 r &= q \\ \beta_1 \alpha_1 + \beta_2 \alpha_2 + \beta_3 \alpha_3 &= 0, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \gamma_1 D\alpha_1 + \gamma_2 D\alpha_2 + \gamma_3 D\alpha_3 &= -q \\ \gamma_1 p + \gamma_2 q + \gamma_3 r &= r \\ \gamma_1 \alpha_1 + \gamma_2 \alpha_2 + \gamma_3 \alpha_3 &= 0, \end{aligned}$$

deren Determinante von Null verschieden ist;

Dieselbe ist: $(D\alpha_1)^2 + (D\alpha_2)^2 + (D\alpha_3)^2 = q'^2 + r'^2$.

Auf diese Weise findet man:

$$p' = \frac{k\sqrt{\lambda}}{\mu(x_1 - x_2)} \left\{ \sqrt{4, 5, x_1} \sqrt{1, 2, 3, x_2} - \sqrt{4, 5, x_2} \sqrt{1, 2, 3, x_1} \right\},$$

$$q' = \frac{k\sqrt{\lambda}}{\mu} \cdot \frac{\nu - \delta_4}{\sqrt{\delta_5 - \delta_4}} \sqrt{(\delta_5 - x_1)(\delta_5 - x_2)},$$

$$r' = \frac{k\sqrt{\lambda}}{\mu} \cdot \frac{\nu - \delta_5}{\sqrt{\delta_4 - \delta_5}} \sqrt{(\delta_4 - x_1)(\delta_4 - x_2)};$$

$$\beta_1 = \frac{\sqrt{2, 3, 5, x_2} \sqrt{1, 4, x_1} - \sqrt{2, 3, 5, x_1} \sqrt{1, 4, x_2}}{(x_1 - x_2)\sqrt{(\delta_1 - \delta_2)(\delta_1 - \delta_3)(\delta_5 - \delta_4)}},$$

$$\beta_2 = \frac{\sqrt{3,\,1,\,5,\,x_2}\,\sqrt{2,\,4,\,x_1} - \sqrt{3,\,1,\,5,\,x_1}\,\sqrt{2,\,4,\,x_2}}{(x_1 - x_2)\sqrt{(\delta_2 - \delta_3)\,(\delta_2 - \delta_1)\,(\delta_5 - \delta_4)}},$$

$$\beta_3 = \frac{\sqrt{1,\,2,\,5,\,x_2}\,\sqrt{3,\,4,\,x_1} - \sqrt{1,\,2,\,5,\,x_1}\,\sqrt{3,\,4,\,x_2}}{(x_1 - x_2)\sqrt{(\delta_3 - \delta_1)\,(\delta_3 - \delta_2)\,(\delta_5 - \delta_4)}};$$

$$\gamma_1 = \frac{\sqrt{2,\,3,\,4,\,x_2}\,\sqrt{1,\,5,\,x_1} - \sqrt{2,\,3,\,4,\,x_1}\,\sqrt{1,\,5,\,x_2}}{(x_1 - x_2)\sqrt{(\delta_1 - \delta_2)\,(\delta_1 - \delta_3)\,(\delta_4 - \delta_5)}},$$

$$\gamma_2 = \frac{\sqrt{3,\,1,\,4,\,x_2}\,\sqrt{2,\,5,\,x_1} - \sqrt{3,\,1,\,4,\,x_1}\,\sqrt{2,\,5,\,x_2}}{(x_1 - x_2)\sqrt{(\delta_2 - \delta_3)\,(\delta_2 - \delta_1)\,(\delta_4 - \delta_5)}},$$

$$\gamma_3 = \frac{\sqrt{1,\,2,\,4,\,x_2}\,\sqrt{3,\,5,\,x_1} - \sqrt{1,\,2,\,4,\,x_1}\,\sqrt{3,\,5,\,x_2}}{(x_1 - x_2)\sqrt{(\delta_3 - \delta_1)\,(\delta_3 - \delta_2)\,(\delta_4 - \delta_5)}}.$$

Aus der Gleichungsgruppe (22) ergibt sich:

$$\beta = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\delta_4 - \delta_5}}\sqrt{(\delta_4 - x_1)\,(\delta_4 - x_2)}, \qquad \gamma = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\delta_5 - \delta_4}}\sqrt{(\delta_5 - x_1)\,(\delta_5 - x_2)}.$$

Die erste Gleichung der Gruppe (6) liefert:

$$D\alpha = k\left\{\frac{\alpha_1^2}{A_1} + \frac{\alpha_2^2}{B_1} + \frac{\alpha_2^3}{C_1} + \right\},$$

hieraus wird:

$$D\alpha = \frac{h}{k} - \frac{\lambda k}{\mu}(\nu - \delta_4)(\nu - \delta_5) + \frac{\lambda k}{\mu}(\nu - x_1)(\nu - x_2),$$

$$\text{wo: } h = k^2\left(\frac{l}{A_1} + \frac{m}{B_1} + \frac{n}{C_1}\right).$$

und endlich:

$$\alpha = \left\{\frac{h}{k} + \frac{\lambda k \nu}{\mu}(\delta_4 + \delta_5) - \frac{\lambda k}{\mu}\,\delta_4\,\delta_5\right\} t - \frac{\sqrt{\lambda}}{2}\left\{\int \frac{x_1^2\,dx_1}{R(x_1)} + \int \frac{x_2^2\,dx_2}{R(x_2)}\right\}$$

Durch diese Formeln sind alle zwölf Coefficienten, welche die Bewegung des festen Körpers in der Flüssigkeit bestimmen, eindeutig in Functionen der x_1 und x_2 ausgedrückt; und diese findet man wiederum durch Umkehrung hyperelliptischer Integrale als Functionen der Zeit.

Die Ungleichungen (28) und (29) lehren, dass im Ganzen vier verschiedene Fälle möglich, die in nachstehender Tafel aufgeführt sind.

$$\begin{array}{ll}
\text{I} & \delta_1 < x_1 < \delta_4 < \delta_2 < x_2 < \delta_5 < \delta_3 \\
\text{II} & \delta_1 < x_1 < \delta_4 < \delta_2 < x_2 < \delta_3 < \delta_5 \\
\text{III} & \delta_1 < x_1 < \delta_2 < \delta_4 < x_2 < \delta_5 < \delta_3 \\
\text{IV} & \delta_1 < x_1 < \delta_2 < \delta_4 < x_2 < \delta_3 < \delta_5.
\end{array}$$

Der Zweck dieser Arbeit ist nun — wie schon oben erwähnt — alle jene Fälle zu ermitteln und zu behandeln, in denen die hyperelliptischen Integrale zu elliptischen werden, unter der Voraussetzung, dass der feste Körper in Bezug auf Gestalt und Massenverteilung den Charakter des dreiaxigen Ellipsoids behält. Es sind mithin die Fälle aufzusuchen, in denen der Radikand von R (x) von nicht höherem als vierten Grade wird, ohne dass unter den drei Grössen δ_1, δ_2, δ_3 zwei einander gleich werden. Dies tritt ein, falls δ_4 oder δ_5 in eine der drei Grössen δ_1, δ_2, δ_3 übergeht oder falls $\delta_4 = \delta_5$ wird. Mit Rücksicht auf obige Tafel ergeben sich im Ganzen folgende neun Fälle:

$$\begin{array}{ll}
1. & \delta_1 < x_1 < \delta_4 < \delta_2 < x_2 < \delta_5 = \delta_3 \\
2. & \delta_1 < x_1 < \delta_2 < \delta_4 < x_2 < \delta_5 = \delta_3 \\
3. & \delta_1 < x_1 < \delta_4 = \delta_2 < x_2 < \delta_5 < \delta_3 \\
4. & \delta_1 < x_1 < \delta_4 = \delta_2 < x_2 < \delta_3 < \delta_5 \\
5. & \delta_1 = x_1 = \delta_4 < \delta_2 < x_2 < \delta_5 < \delta_3 \\
6. & \delta_1 = x_1 = \delta_4 < \delta_2 < x_2 < \delta_3 < \delta_5 \\
7. & \delta_1 < x_1 < \delta_4 < \delta_2 = x_2 = \delta_5 < \delta_3 \\
8. & \delta_1 < x_1 < \delta_2 < \delta_4 = x_2 = \delta_3 < \delta_5 \\
9. & \delta_1 < x_1 < \delta_2 < \delta_4 = x_2 = \delta_5 < \delta_3.
\end{array}$$

Bevor wir zur Betrachtung der einzelnen Fälle schreiten, sollen die Integrale, durch deren Umkehrung wir die Hülfsveränderlichen x_1 und x_2 oder ihre transformirten Werte in Function der Zeit darstellen, unter der Annahme behandelt werden, dass irgend zwei und nur zwei der fünf Grössen δ einander gleich sind.

Wir setzen: $\varepsilon = \delta_i = \delta_k \quad (i, k = 1, 2, 3, 4, 5)$

und bezeichnen die drei übrigen δ ihrer Grösse nach mit ε_1, ε_2, ε_3, so dass:

$$\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3.$$

Dann wird: $R(x) = (\varepsilon - x)\,\mathfrak{R}(x)$,

wo: $\mathfrak{R}(x) = \sqrt{-(\varepsilon_1 - x)(\varepsilon_2 - x)(\varepsilon_3 - x)}$.

Die Differentialgleichungen (31*) werden:

$$\frac{dx_1}{(\varepsilon - x_1)\,\mathfrak{R}(x_1)} + \frac{dx_2}{(\varepsilon - x_2)\,\mathfrak{R}(x_2)} = \frac{2k\sqrt{\lambda}}{\mu}\,dt$$

$$\frac{x_1\,dx_1}{(\varepsilon - x_1)\,\mathfrak{R}(x_1)} + \frac{x_2\,dx_2}{(\varepsilon - x_2)\,\mathfrak{R}(x_2)} = \frac{2k\sqrt{\lambda}}{\mu}\,\nu\,dt.$$

oder:

$$\frac{dx_1}{\mathfrak{R}(x_1)} + \frac{dx_2}{\mathfrak{R}(x_2)} = 2k\sqrt{\lambda}\,\frac{\varepsilon - \nu}{\mu}\,dt$$

$$\frac{(\varepsilon_1 - x_1)\,dx_1}{(\varepsilon - x_1)\,\mathfrak{R}(x_1)} + \frac{(\varepsilon_1 - x_2)\,dx_2}{(\varepsilon - x_2)\,\mathfrak{R}(x_2)} = 2k\sqrt{\lambda}\,\frac{\varepsilon_1 - \nu}{\mu}\,dt.$$

Haben x_1 und x_2 zur Zeit $t = 0$ die Werte $x_1^{(0)}$ und $x_2^{(0)}$, so lauten die Integralgleichungen des Problems:

$$\int_{x_1^{(0)}}^{x_1} \frac{dx}{\mathfrak{R}(x)} + \int_{x_2^{(0)}}^{x_2} \frac{dx}{\mathfrak{R}(x)} = 2k\sqrt{\lambda}\,\frac{\varepsilon - \nu}{\mu}\,t,$$

$$\int_{x_1^{(0)}}^{x_1} \frac{\varepsilon_1 - x}{\varepsilon - x}\cdot\frac{dx}{\mathfrak{R}(x)} + \int_{x_2^{(0)}}^{x_2} \frac{\varepsilon_1 - x}{\varepsilon - x}\cdot\frac{dx}{\mathfrak{R}(x)} = 2k\sqrt{\lambda}\,\frac{\varepsilon_1 - \nu}{\mu}\cdot t;$$

$$\text{wo: } \mathfrak{R}(x) = \sqrt{-(\varepsilon_1 - x)(\varepsilon_2 - x)(\varepsilon_3 - x)},$$

$$\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3.$$

Setzt man: $x - \varepsilon_1 = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\,z^2$, $\quad \varepsilon_3 - x = (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)(1 - \varkappa^2 z^2)$,

$\varepsilon_2 - x = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(1 - z^2)$, $\quad \varepsilon - x = (\varepsilon - \varepsilon_1)(1 - \varkappa^2 a^2 z^2)$,

$$\text{wo: } \varkappa^2 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_3 - \varepsilon_1},\quad a^2 = \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{\varepsilon - \varepsilon_1},$$

so lauten diese Gleichungen, nachdem man beide Seiten der zweiten mit $\frac{\sqrt{1 - a^2}\,\sqrt{1 - \varkappa^2 a^2}}{a}$ multiplizirt hat:

$$\int_{z_1^{(0)}}^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - \varkappa^2 z^2)}} + \int_{z_2^{(0)}}^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - \varkappa^2 z^2)}} = k\sqrt{\lambda(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)}\,\frac{\varepsilon - \nu}{\mu}\cdot t$$

$$\int_{z_1^{(0)}}^{z_1} \frac{\varkappa^2 a\sqrt{1 - a^2}\cdot\sqrt{1 - \varkappa^2 a^2}\cdot z^2\,dz}{(1 - \varkappa^2 a^2 z^2)\sqrt{(1 - z^2)(1 - \varkappa^2 z^2)}} + \int_{z_2^{(0)}}^{z_2} \frac{\varkappa^2 a^2\sqrt{1 - a^2}\cdot\sqrt{1 - \varkappa^2 a^2}\cdot z^2\,dz}{(1 - \varkappa^2 a^2 z^2)\sqrt{(1 - z^2)(1 - \varkappa^2 z^2)}}$$

$$= -k\sqrt{\lambda\,\frac{(\varepsilon - \varepsilon_2)(\varepsilon - \varepsilon_3)}{\varepsilon - \varepsilon_1}}\cdot\frac{\varepsilon_1 - \nu}{\mu}\cdot t.$$

Setzt man ferner:

$$u_1 = \int_0^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - \varkappa^2 z^2)}},\quad u_2 = \int_0^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - \varkappa^2 z^2)}},$$

$$u_1^{(0)} = \int_0^{z_1^{(0)}} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - \varkappa^2 z^2)}}, \quad u_2^{(0)} = \int_0^{z_2^{(0)}} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - \varkappa^2 z^2)}},$$

$$z_1 = \sin am\, u_1, \quad z_1^{(0)} = \sin am\, u_1^{(0)}, \quad z_2 = \sin am\, u_2, \quad z_2^{(0)} = \sin am\, u_2^{(0)},$$

$$a = \sin am\, \omega,$$

und bezeichnet man mit $\Pi(u, \omega)$ das elliptische Integral dritter Gattung, so dass:

$$\Pi(u, \omega) = \int_0^z \frac{\varkappa^2 s(\omega) c(\omega) \delta(\omega) z^2 dz}{(1 - \varkappa^2 s^2(\omega) z^2)\sqrt{(1 - z^2)(1 - \varkappa^2 z^2)}},$$

so werden die Integralgleichungen:

$$u_1 + u_2 = u_1^{(0)} + u_2^{(0)} + k\sqrt{\lambda(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)}\, \frac{\varepsilon - \nu}{\mu} \cdot t.$$

$$\Pi(u_1, \omega) + \Pi(u_2, \omega) = \Pi(u_1^{(0)}, \omega) + \Pi(u_2^{(0)}, \omega) - k\sqrt{\lambda \frac{(\varepsilon - \varepsilon_2)(\varepsilon - \varepsilon_3)}{\varepsilon - \varepsilon_1}} \cdot \frac{\varepsilon_1 - \nu}{\mu} \cdot t.$$

Nun ist: $\Pi(u, \omega) = u\, Z(\omega) + \frac{1}{2} \log \frac{\Theta(u - \omega)}{\Theta(u - \omega)}$, falls Θ die Jacobische Thetafunction und Z die Zetafunction bezeichnet, so dass:

$$Z(\omega) = \frac{d \log \Theta(\omega)}{d\omega}.$$

Es wird:

$$\Pi(u_1) + \Pi(u_2) = (u_1 + u_2)\, Z(\omega) + \frac{1}{2} \log \frac{\Theta(u_1 - \omega)\, \Theta(u_2 - \omega)}{\Theta(u_1 + \omega)\, \Theta(u_2 + \omega)}$$

und mithin die zweite Gleichung:

$$\frac{\Theta(u_1 - \omega)\, \Theta(u_2 - \omega)}{\Theta(u_1 + \omega)\, \Theta(u_2 + \omega)} = \frac{\Theta(u_1^{(0)} - \omega)\, \Theta(u_2^{(0)} - \omega)}{\Theta(u_1^{(0)} + \omega)\, \Theta(u_2^{(0)} + \omega)} \cdot e^{-2\,\text{const.}\,.\,t.}$$

Die Integralgleichungen kann man schreiben:

$$u_1 + u_2 = \sigma$$

$$\frac{\Theta(u_1 - \omega)\, \Theta(u_2 - \omega)}{\Theta(u_1 + \omega)\, \Theta(u_2 + \omega)} = e^{-2\tau}$$

wo σ und τ lineare Functionen der Zeit sind; nämlich:

$$\sigma = u_1^{(0)} + u_2^{(0)} + k\sqrt{\lambda(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)} \cdot \frac{\varepsilon - \nu}{\mu} \cdot t.$$

$$\tau = \frac{1}{2} \log \frac{\Theta(u_1^{(0)} + \omega)\, \Theta(u_2^{(0)} + \omega)}{\Theta(u_1^{(0)} - \omega)\, \Theta(u_2^{(0)} - \omega)}$$

$$+ k\sqrt{\lambda(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)} \left\{ \frac{\varepsilon - \nu}{\mu} Z(\omega) + \frac{\varepsilon_1 - \nu}{\mu} \sqrt{\frac{\varepsilon - \varepsilon_2 \,.\, \varepsilon - \varepsilon_3}{\varepsilon - \varepsilon_1 \,.\, \varepsilon_3 - \varepsilon_1}} \right\} t.$$

Nach art. 54 der Fund. nov. Jacobis ist nun:

$$\frac{\Theta(u_1-\omega)\,\Theta(u_2-\omega)\,\Theta(u_1+u_2+\omega)}{\Theta(u_1+\omega)\,\Theta(u_2+\omega)\,\Theta(u_1+u_2-\omega)}=\frac{1-\varkappa^2\,s(\omega)\,s(u_1+u_2-\omega)\,s(u_1)\,s(u_2)}{1+\varkappa^2\,s(\omega)\,s(u_1+u_2+\omega)\,s(u_1)\,s(u_2)}$$

daher wird:

$$\frac{1-\varkappa^2\,s(\omega)\,s(u_1+u_2-\omega)\,s(u_1)\,s(u_2)}{1+\varkappa^2\,s(\omega)\,s(u_1+u_2+\omega)\,s(u_1)\,s(u_2)}=e^{-2\tau}\cdot\frac{\Theta(\sigma+\omega)}{\Theta(\sigma-\omega)}.$$

Setzt man: $s(u_1+u_2-\omega)=\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\,\frac{H(\sigma-\omega)}{\Theta(\sigma-\omega)}$, $s(u_1+u_2+\omega)=\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\,\frac{H(\sigma+\omega)}{\Theta(\sigma+\omega)}$,

und berechnet aus der letzten Gleichung $\varkappa\,.\,s(u_1)\,.\,s(u_2)$, so wird:

$$\varkappa\,.\,s(u_1)\,.\,s(u_2)=\frac{\Theta(\omega)}{H(\omega)}\cdot\frac{e^{\tau}\,.\,\Theta(\sigma-\omega)-e^{-\tau}\,\Theta(\sigma-\omega)}{e^{\tau}\,.\,H(\sigma-\omega)+e^{-\tau}\,H(\sigma+\omega)}.$$

Man kann aus den Additionstheoremen für cosam und $\triangle$am leicht die Gleichungen ableiten:

$$c(u_1)\,.\,c(u_2)=c(u_1+u_2)+\delta(u_1+u_2)\,.\,s(u_1)\,s(u_2)$$
$$\delta(u_1)\,.\,\delta(u_2)=\delta(u_1+u_2)+\varkappa^2\,.\,c(u_1+u_2)\,.\,s(u_1)\,s(u_2).$$

Aus diesen kann man auch $c(u_1)\,.\,c(u_2)$ und $\delta(u_1)\,.\,\delta(u_2)$ durch Thetafunctionen und Exponentialfunctionen, deren Argumente lineare Functionen der Zeit sind, darstellen.

Es soll hier aber ein besserer Weg angegeben werden, zur Berechnung dieser Producte, der nämlich, welchen Rosenhain im ersten Capitel seiner preisgekrönten Abhandlung[1]) über vierfach periodische Functionen eingeschlagen hat.

Setzt man: $s=\frac{\tau}{2K}$, $v_1=\frac{u_1}{2K}$, $v_2=\frac{u_2}{2K}$, $b=\frac{\omega}{2K}$, wo K das vollständige elliptische Integral erster Gattung bedeutet, so wird:

$$e^{-2\tau}=\frac{\vartheta_{01}(v_1-b)\,\vartheta_{01}(v_2-b)}{\vartheta_{01}(v_1+b)\,\vartheta_{01}(v_2+b)}.$$

Mit Hülfe von Beziehungen, welche zwischen den vier Thetafunctionen erster Ordnung bestehen, kann man diesen Quotienten auf drei Arten darstellen. Es wird dann:

$$e^{-2\tau}=\frac{\vartheta_{01}(v_1)\,\vartheta_{01}(v_2)\,\vartheta_{01}(b)\,\vartheta_{01}(s-b)-\vartheta_{11}(v_1)\,\vartheta_{11}(v_2)\,\vartheta_{11}(b)\,\vartheta_{11}(s-b)}{\vartheta_{01}(v_1)\,\vartheta_{01}(v_2)\,\vartheta_{01}(b)\,\vartheta_{01}(s+b)+\vartheta_{11}(v_1)\,\vartheta_{11}(v_2)\,\vartheta_{11}(b)\,\vartheta_{11}(s+b)},$$

$$e^{-2\tau}=\frac{\vartheta_{01}(v_1)\,\vartheta_{01}(v_2)\,\vartheta_{00}(b)\,\vartheta_{00}(s-b)-\vartheta_{10}(v_1)\,\vartheta_{10}(v_2)\,\vartheta_{11}(b)\,\vartheta_{11}(s-b)}{\vartheta_{01}(v_1)\,\vartheta_{01}(v_2)\,\vartheta_{00}(b)\,\vartheta_{00}(s+b)+\vartheta_{10}(v_1)\,\vartheta_{10}(v_2)\,\vartheta_{11}(b)\,\vartheta_{11}(s+b)},$$

$$e^{-2\tau}=\frac{\vartheta_{01}(v_1)\,\vartheta_{01}(v_2)\,\vartheta_{10}(b)\,\vartheta_{10}(s-b)-\vartheta_{00}(v_1)\,\vartheta_{00}(v_2)\,\vartheta_{11}(b)\,\vartheta_{11}(s-b)}{\vartheta_{01}(v_1)\,\vartheta_{01}(v_2)\,\vartheta_{10}(b)\,\vartheta_{10}(s+b)+\vartheta_{00}(v_1)\,\vartheta_{00}(v_2)\,\vartheta_{11}(b)\,\vartheta_{11}(s+b)}.$$

Aus den letzten Gleichungen berechnen sich leicht die Ausdrücke:

$$\frac{\vartheta_{11}(v_1)\,\vartheta_{11}(v_2)}{\vartheta_{01}(v_1)\,\vartheta_{01}(v_2)},\quad\frac{\vartheta_{10}(v_1)\,\vartheta_{10}(v_2)}{\vartheta_{01}(v_1)\,\vartheta_{01}(v_2)},\quad\text{und}\quad\frac{\vartheta_{00}(v_1)\,\vartheta_{00}(v_2)}{\vartheta_{01}(v_1)\,\vartheta_{01}(v_2)}.$$

---

[1]) Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences. Sciences mathématiques et physiques. Tome XI.

Man findet:

$$\frac{\vartheta_{11}(v_1)\,\vartheta_{11}(v_2)}{\vartheta_{01}(v_1)\,\vartheta_{01}(v_2)} = \frac{\vartheta_{01}(b)}{\vartheta_{11}(b)}\;\frac{e^{\tau}\vartheta_{01}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{01}(s+b)}{e^{\tau}\vartheta_{11}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{11}(s+b)} = \varkappa\, s(u_1)\, s(u_2),$$

$$\frac{\vartheta_{10}(v_1)\,\vartheta_{10}(v_2)}{\vartheta_{01}(v_1)\,\vartheta_{01}(v_2)} = \frac{\vartheta_{00}(b)}{\vartheta_{11}(b)}\;\frac{e^{\tau}\vartheta_{00}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{00}(s+b)}{e^{\tau}\vartheta_{11}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{11}(s+b)} = \frac{\varkappa}{\varkappa'}\, c(u_1)\, c(u_2),$$

$$\frac{\vartheta_{00}(v_1)\,\vartheta_{00}(v_2)}{\vartheta_{01}(v_1)\,\vartheta_{01}(v_2)} = \frac{\vartheta_{10}(b)}{\vartheta_{11}(b)}\;\frac{e^{\tau}\vartheta_{10}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{10}(s+b)}{e^{\tau}\vartheta_{11}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{11}(s+b)} = \frac{1}{\varkappa'}\,\delta(u_1)\,\delta(u_2).$$

Setzt man: $\psi(u_1) = \sqrt{1 - \varkappa^2 a^2 s^2(u_1)}$, $\psi(u_2) = \sqrt{1 - \varkappa^2 a^2 s^2(u_2)}$,

so findet man nach einigen Umformungen:

$$\psi(u_1)\,.\,\psi(u_2) = \frac{\vartheta_{01}\,\vartheta_{10}(b)\,\vartheta_{00}(b)}{\vartheta_{10}\,\vartheta_{00}^{(0)}\,\vartheta_{01}(b)}\;\frac{2\,\vartheta_{11}(s)}{e^{\tau}\vartheta_{11}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{11}(s+b)}.$$

Es lässt sich nun eine quadratische Gleichung aufstellen, deren Wurzeln $s^2(u_1)$ und $s^2(u_2)$ sind. Dieselbe lautet:

$$\frac{1}{1-\xi^2}\cdot\frac{c^2(u_1)\,c^2(u_2)}{\varkappa'^2\,.\,\delta^2(\omega)} - \frac{1}{1-\varkappa^2\xi^2}\cdot\frac{\delta^2(u_1)\,\delta^2(u_2)}{\varkappa^2\,\varkappa'^2\,c^2(\omega)} + \frac{1}{1-\varkappa^2 a^2\xi^2}\cdot\frac{\psi^2(u_1)\,\psi^2(u_2)}{\varkappa^2\,c^2(\omega)\,\delta^2(\omega)} = 0.$$

und wird nach Einführung der Thetafunctionen und nach einiger Umformung:

$$\frac{\vartheta_{00}^2\left\{e^{\tau}\vartheta_{00}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{00}(s+b)\right\}^2}{1-\xi^2} - \frac{\vartheta_{10}^2\left\{e^{\tau}\vartheta_{10}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{10}(s+b)\right\}^2}{1-\varkappa^2\xi^2}$$
$$+ \frac{4\,\vartheta_{11}^2(b)\,\vartheta_{11}^2(s)}{1-\varkappa^2 a^2\xi^2} = 0.$$

Nachdem man durch Auflösen dieser Gleichung $s(u_1)$ und $s(u_2)$ gefunden hat, ergeben sich leicht die Grössen $c(u_1)$, $c(u_2)$, $\delta(u_1)$, $\delta(u_2)$, $\psi(u_1)$, $\psi(u_2)$ in Function der Zeit.

Es kommt jedoch nicht darauf an, diese acht Functionen gesondert darzustellen; vielmehr ist es von Wichtigkeit, die Verbindungen dieser Functionen zu berechnen, durch welche die Coefficienten des Problems ausgedrückt werden.

Rosenhain gibt im ersten Capitel seiner erwähnten, berühmten Abhandlung im art. 8 in der Gleichungsgruppe (31) eine elegante Darstellung von 11 Verbindungen obiger acht Functionen. Setzt man der Kürze halber:

$$\xi_1 = s(u_1),\quad \eta_1 = c(u_1),\quad \zeta_1 = \delta(u_1),\quad \psi_1 = \psi(u_1),$$
$$\xi_2 = s(u_2),\quad \eta_2 = c(u_2),\quad \zeta_2 = \delta(u_2),\quad \psi_2 = \psi(u_2),$$
$$\varkappa'^2 = 1 - \varkappa^2,\quad \lambda^2 = \varkappa^2 a^2,\quad \lambda_1^2 = 1 - \lambda^2,\quad \lambda_\varkappa^2 = \varkappa^2 - \lambda^2,$$

und: $\varphi = e^{\tau}\vartheta_{11}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{11}(s-b).$

so lautet diese Gruppe:

$$1.\ \sqrt{\varkappa}\,.\,\lambda\,\xi_1\,.\,\xi_2 = \frac{\varphi_1}{\varphi}$$

$$2.\ \sqrt{\frac{\varkappa}{\varkappa'}}\cdot\frac{\lambda}{\lambda'}\cdot\eta_1\,.\,\eta_2 = \frac{\varphi_2}{\varphi}$$

$$3.\ \sqrt{\frac{1}{\varkappa'}}\cdot\frac{\lambda}{\lambda_\varkappa}\cdot\zeta_1\,.\,\zeta_2 = \frac{\varphi_3}{\varphi}$$

$$4.\ \frac{\lambda}{\lambda_1\,\lambda_\varkappa}\cdot\frac{1}{\xi_1^2-\xi_2^2}\left\{\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2\,\psi_1^2-\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1\,\psi_2^2\right\} = \frac{\varphi_4}{\varphi}$$

$$5.\ \frac{\sqrt{\varkappa}}{\lambda_1\,\lambda_\varkappa}\cdot\frac{1}{\xi_1^2-\xi_2^2}\left\{\xi_2\,\eta_1\,\zeta_1\,\psi_2^2-\xi_1\,\eta_2\,\zeta_2\,\psi_1^2\right\} = \frac{\varphi_5}{\varphi}$$

$$6.\ \sqrt{\frac{\varkappa}{\varkappa_1}}\cdot\frac{1}{\lambda_\varkappa}\cdot\frac{1}{\xi_1^2-\xi_2^2}\left\{\xi_1\,\eta_2\,\zeta_1\,\psi_2^2-\xi_2\,\eta_1\,\zeta_2\,\psi_1^2\right\} = \frac{\varphi_6}{\varphi}$$

$$7.\ \frac{1}{\sqrt{\varkappa'}\,\lambda_1}\cdot\frac{1}{\xi_1^2-\xi_2^2}\left\{\xi_1\,\eta_1\,\zeta_2\,\psi_2^2-\xi_2\,\eta_2\,\zeta_1\,\psi_1^2\right\} = \frac{\varphi_7}{\varphi}.$$

Diese sieben Quotienten sind dreifach periodische Functionen ihrer Argumente. Den Periodicitätsindices 0, $\frac{i\pi\omega}{K}$, $i\pi$ von τ entsprechen in derselben Reihenfolge die Indices 1, $i\,\frac{K'}{K}$, 0 von s.

Die Functionen φ_1 bis φ_7 entstehen — abgesehen von einem Exponentialfactor — aus φ, indem man seine Argumente um die Hälften conjugirter Indices vermehrt.

Es wird:

$$\varphi_1 = e^{\tau}\vartheta_{01}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{01}(s+b) \qquad \varphi_5 = e^{\tau}\vartheta_{01}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{01}(s+b)$$

$$\varphi_2 = e^{\tau}\vartheta_{00}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{00}(s+b) \qquad \varphi_6 = e^{\tau}\vartheta_{00}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{00}(s+b)$$

$$\varphi_3 = e^{\tau}\vartheta_{10}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{10}(s+b) \qquad \varphi_7 = e^{\tau}\vartheta_{10}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{10}(s+b)$$

$$\varphi_4 = e^{\tau}\vartheta_{11}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{11}(s+b) \qquad \varphi = e^{\tau}\vartheta_{11}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{11}(s+b).$$

$$8.\ \frac{\varkappa}{\lambda_1\,\lambda_\varkappa}\,\psi_1\,.\,\psi_2 = 2\,\frac{\vartheta_{01}(b)\,\vartheta_{11}(s)}{\vartheta_{01}\,.\,\varphi}$$

$$9.\ \frac{\sqrt{\varkappa}}{\lambda_1\,\lambda_\varkappa}\,\frac{\psi_1\,.\,\psi_2}{\xi_1^2-\xi_2^2}\left\{\xi_1\,\eta_2\,\zeta_2-\xi_2\,\eta_1\,\zeta_1\right\} = 2\,\frac{\vartheta_{01}(b)\,\vartheta_{01}(s)}{\vartheta_{01}\,.\,\varphi}$$

$$10.\ \frac{\sqrt{\varkappa}}{\varkappa'}\,\frac{1}{\lambda_1\,\lambda_\varkappa}\,\frac{\psi_1-\psi_2}{\xi_1^2-\xi_2^2}\left\{\xi_1\,\eta_2\,\zeta_1-\xi_2\,\eta_1\,\zeta_2\right\} = 2\,\frac{\vartheta_{01}(b)\,\vartheta_{00}(s)}{\vartheta_{01}\,.\,\varphi}$$

$$11.\ \frac{\varkappa}{\sqrt{\varkappa'}}\,\frac{1}{\lambda_1\,\lambda_\varkappa}\,\frac{\psi_1\,.\,\psi_2}{\xi_1^2-\xi_2^2}\left\{\xi_1\,\eta_1\,\zeta_2-\xi_2\,\eta_2\,\zeta_1\right\} = 2\,\frac{\vartheta_{01}(b)\,\vartheta_{10}(s)}{\vartheta_{01}\,.\,\varphi}.$$

Auch diese vier Verbindungen von elliptischen Functionen sind ebenso wie die sieben zuerst angegebenen dreifach periodische Functionen der Argumente s und τ. Auch ihre Periodicität ist derartig, dass den drei Indices 1, $i\frac{K'}{K}$, 0 der Veränderlichen s die drei Indices 0, $2i\pi b$, $i\pi$ von τ in derselben Reihenfolge zugeordnet sind.

Alle elf angeführten Verbindungen von elliptischen Functionen werden in den vier ersten Fällen unseres Problems eine Rolle spielen.

In den **beiden ersten** Fällen ist: $0 < z_1^2 < 1 < \frac{1}{\varkappa^2} < z_2^2 < \frac{1}{\varkappa^2 a^2}$.

Wir setzen daher:

$$\xi_1 = z_1 = \operatorname{sinam} u_1, \qquad u_1 = \int_0^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}}$$

$$\xi_2 = z_2 = \operatorname{sinam}(u_2 + K + iK'), \quad u_2 = \int_{\frac{1}{\varkappa}}^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}}.$$

Es wird:

$$u_1 + u_2 = \sigma$$

$$\frac{\vartheta_{01}(v_1 - b)\,\vartheta_{10}(v_2 - b)}{\vartheta_{01}(v_1 - b)\,\vartheta_{10}(v_2 - b)} = e^{-2\tau}$$

wo:

$$\sigma = u_1^{(0)} + u_2^{(0)} + k\sqrt{\lambda(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)}\,\frac{\varepsilon - \nu}{\mu}\,.\,t.$$

$$\tau = \tau_0 + k\sqrt{\lambda(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)}\left\{\frac{\varepsilon - \nu}{\mu}\,Z(\omega) + \frac{\varepsilon_1 - \nu}{\mu}\sqrt{\frac{(\varepsilon - \varepsilon_2).(\varepsilon - \varepsilon_3)}{(\varepsilon - \varepsilon_1).(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)}}\right\},$$

$$\tau_0 = \frac{1}{2}\log\frac{\vartheta_{01}(v_1^{(0)} + b)\,\vartheta_{10}(v_2^{(0)} + b)}{\vartheta_{01}(v_1^{(0)} - b)\,\vartheta_{10}(v_2^{(0)} - b)},$$

falls: $v_1^{(0)} = \frac{u_1^{(0)}}{2K}$, $v_2^{(0)} = \frac{u_2^{(0)}}{2K}$.

Setzt man $g = e^{\frac{\pi K'}{4K} - i\pi s}$, so werden die acht Funktionen φ in diesen Fällen:

$$\varphi_1 = g\left\{e^{\tau}\vartheta_{10}(s - b) - e^{-\tau}\vartheta_{10}(s + b)\right\}, \quad \varphi_3 = -ig\left\{e^{\tau}\vartheta_{01}(s - b) - e^{-\tau}\vartheta_{01}(s + b)\right\},$$

$$\varphi_2 = ig\left\{e^{\tau}\vartheta_{11}(s - b) - e^{-\tau}\vartheta_{11}(s + b)\right\}, \quad \varphi_4 = g\left\{e^{\tau}\vartheta_{00}(s - b) - e^{-\tau}\vartheta_{00}(s + b)\right\},$$

$$\varphi_5 = g\left\{e^{\tau}\vartheta_{10}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{10}(s+b)\right\}, \quad \varphi_7 = -ig\left\{e^{\tau}\vartheta_{01}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{01}(s+b)\right\},$$

$$\varphi_6 = ig\left\{e^{\tau}\vartheta_{11}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{11}(s+b)\right\}, \quad \varphi = g\left\{e^{\tau}\vartheta_{00}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{00}(s+b)\right\}.$$

Was die Formeln 8 bis 11 betrifft, wird:

$$\vartheta_{11}\left(s + \frac{1}{2} + \frac{iK'}{2K}\right) = g \,.\, \vartheta_{00}(s)$$

$$\vartheta_{01}\left(s + \frac{1}{2} + \frac{iK'}{2K}\right) = -g \,.\, \vartheta_{10}(s)$$

$$\vartheta_{00}\left(s + \frac{1}{2} + \frac{iK'}{2K}\right) = ig \,.\, \vartheta_{11}(s)$$

$$\vartheta_{10}\left(s + \frac{1}{2} + \frac{iK'}{2K}\right) = -ig \,.\, \vartheta_{01}(s).$$

Auch im **dritten** und **vierten** Falle können die oben angeführten Formeln nicht unmittelbar verwendet werden. Denn in diesen beiden Fällen ist: $\frac{1}{\varkappa^2} < a^2 < \infty$, wir setzen daher:

$$a = \sin am\,(\omega + iK');$$

es ist: $Z(\omega + iK') = -\frac{i\pi}{2K} + \cot am\,\omega \,.\, \Delta am\,\omega + Z(\omega)$.

Die Integralgleichungen lauten hier:

$$u_1 + u_2 = \sigma,$$

$$\frac{\vartheta_{10}(v_1 - b)\,\vartheta_{10}(v_2 - b)}{\vartheta_{10}(v_1 + b)\,\vartheta_{10}(v_2 + b)} = e^{-2\tau}$$

wo:

$$\sigma = u_1^{(0)} + u_2^{(0)} + k\sqrt{(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)}\,\frac{\varepsilon - \nu}{\mu} \,.\, t$$

$$\tau = \tau_0 + k\sqrt{\lambda(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)}\left\{\frac{\varepsilon - \nu}{\mu}\,Z(\omega) + \frac{\varepsilon - \nu + \varepsilon_2 - \nu}{\mu}\sqrt{\frac{(\varepsilon - \varepsilon_2)(\varepsilon - \varepsilon_3)}{(\varepsilon - \varepsilon_1)(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)}}\right\}.$$

$$\tau_0 = \frac{1}{2}\log\frac{\vartheta_{10}(v_1^{(0)} + b)\,\vartheta_{10}(v_2^{(0)} + b)}{\vartheta_{10}(v_1^{(0)} - b)\,\vartheta_{10}(v_2^{(0)} - b)}$$

Die acht Functionen φ nehmen die Form an:

$$\varphi_1 = -ih\left\{e^{\tau}\vartheta_{11}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{11}(s+b)\right\}, \quad \varphi_5 = -ih\left\{e^{\tau}\vartheta_{11}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{11}(s+b)\right\},$$

$$\varphi_2 = h\left\{e^{\tau}\vartheta_{10}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{10}(s+b)\right\}, \quad \varphi_6 = h\left\{e^{\tau}\vartheta_{10}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{10}(s+b)\right\},$$

$$\varphi_3 = h\left\{e^{\tau}\vartheta_{00}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{00}(s+b)\right\}, \quad \varphi_7 = h\left\{e^{\tau}\vartheta_{00}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{00}(s+b)\right\},$$

$$\varphi_4 = -ih\left\{e^{\tau}\vartheta_{01}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{01}(s+b)\right\}, \quad \varphi = -ih\left\{e^{\tau}\vartheta_{01}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{01}(s+b)\right\};$$

$$\text{wo: } h = e^{\frac{\pi K'}{4K} - \pi i b}.$$

Ferner wird: $\vartheta_{01}\left(b + \frac{iK'}{2K}\right) = ih\,\vartheta_{11}(b).$

Wenden wir uns nun zu der zur Berechnung von α erforderlichen Integration. Es ist:

$$\alpha = \left\{\frac{h}{k} + \frac{\lambda k \nu}{\mu}(\delta_4 + \delta_5) - \frac{\lambda k}{\mu}\delta_4\,\delta_5\right\} t$$

$$- \frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\left\{\int_{x_1^{(0)}}^{x_1} \frac{x_1^2\,dx_1}{R(x_1)} + \int_{x_2^{(0)}}^{x_2} \frac{x_2^2\,dx_2}{R(x_2)}\right\}.$$

Es wird: $\frac{x^2\,dx}{R(x)} = \frac{x^2\,dx}{(\varepsilon - x)\,\mathfrak{R}(x)};$

$$\frac{x^2}{\varepsilon - x} = \left(\frac{\varepsilon\varepsilon_1}{\varepsilon - \varepsilon_1} - \varepsilon_3\right) + (\varepsilon_3 - x) - \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon - \varepsilon_1}\,\frac{\varepsilon_1 - x}{\varepsilon - x},$$

und daher:

$$\int_{x_1^{(0)}}^{x_1} \frac{x^2\,dx}{R(x)} + \int_{x_2^{(0)}}^{x_2} \frac{x^2\,dx}{R(x)} = \left(\frac{\varepsilon\varepsilon_1}{\varepsilon - \varepsilon_1} - \varepsilon_3\right)\left\{\int_{x_1^{(0)}}^{x_1} \frac{dx}{\mathfrak{R}(x)} + \int_{x_2^{(0)}}^{x_2} \frac{dx}{\mathfrak{R}(x)}\right\}$$

$$- \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon - \varepsilon_1}\left\{\int_{x_1^{(0)}}^{x_1} \frac{(\varepsilon_1 - x)\,dx}{(\varepsilon - x)\,\mathfrak{R}(x)} + \int_{x_2^{(0)}}^{x_2} \frac{\varepsilon_1 - x}{\varepsilon - x}\,\frac{dx}{\mathfrak{R}(x)}\right\}$$

$$+ \int_{x_1^{(0)}}^{x_1} \sqrt{\frac{\varepsilon_3 - x}{-(\varepsilon_1 - x)(\varepsilon_2 - x)}}\,dx + \int_{x_2^{(0)}}^{x_2} \sqrt{\frac{\varepsilon_3 - x}{-(\varepsilon_1 - x)(\varepsilon_2 - x)}}\,dx.$$

Die beiden ersten Summen von Integralen der rechten Seite sind Vielfache von t. Auf die beiden letzten Integrale wenden wir die Substitution an:

$$\begin{aligned} x - \varepsilon_1 &= (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\,z^2, \\ \varepsilon_2 - x &= (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(1 - z^2), \qquad \varkappa^2 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}, \\ \varepsilon_3 - x &= (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)(1 - \varkappa^2 z^2), \end{aligned}$$

dann wird:

$$\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}} \int_{x^{(0)}}^{x} \sqrt{\frac{\varepsilon_3 - x}{-(\varepsilon_1 - x)(\varepsilon_2 - x)}}\,dx = \int_{z^{(0)}}^{z} \sqrt{\frac{1 - \varkappa^2 z^2}{1 - z^2}}\,dz = E(u) - E(u^{(0)}),$$

wenn u das elliptische Integral erster Gattung, E (u) das elliptische Integral zweiter Gattung bezeichnet.

Man erhält dann:

$$\int_{x_1^{(0)}}^{x_1} \frac{x^2\,dx}{R(x)} + \int_{x_2^{(0)}}^{x_2} \frac{x^2\,dx}{R(x)} = \frac{2k\sqrt{\lambda}}{\mu}\left\{\nu(\varepsilon+\varepsilon_3) - \varepsilon\varepsilon_3\right\} t$$

$$+ 2\sqrt{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}\left\{E(u_1) + E(u_2) - E(u_1^{(0)}) - E(u_2^{(0)})\right\}.$$

Das Additionstheorem der elliptischen Integrale zweiter Gattung lautet:

$$E(u_1) + E(u_2) = E(u_1 + u_2) + \varkappa^2 s(u_1 + u_2)\, s(u_1)\, s(u_2)$$

mithin wird:

$$\alpha = \left\{\frac{h}{k} + \frac{\lambda k \nu}{\mu}(\delta_4 + \delta_5 - \varepsilon - \varepsilon_3) - \frac{\lambda k}{\mu}(\delta_4\ \delta_5 - \varepsilon\varepsilon_3)\right\} t$$

$$- \sqrt{\lambda(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)}\left\{E(\sigma) + \frac{\vartheta_{10}\ \vartheta_{01}(b)}{\vartheta_{00}\ \vartheta_{11}(b)}\ \frac{\vartheta_{11}(s)}{\vartheta_{01}(s)}\ \frac{e^{\tau}\vartheta_{01}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{01}(s+b)}{e^{\tau}\vartheta_{11}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{11}(s+b)}\right\} + \text{const.}$$

Wo: $\sigma = \sigma_0 + k\sqrt{\lambda(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)}\ \frac{\varepsilon - \nu}{\mu}\, t$

$$\sigma_0 = u_1^{(0)} + u_2^{(0)}$$

$$\tau = \tau_0 + k\sqrt{\lambda(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)}\left\{\frac{\varepsilon - \nu}{\mu} Z(\omega) + \frac{\varepsilon_1 - \nu}{\mu}\sqrt{\frac{(\varepsilon - \varepsilon_2)\,.\,(\varepsilon - \varepsilon_3)}{(\varepsilon - \varepsilon_1)\,.\,(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)}}\right\} t$$

$$\tau_0 = \frac{1}{2}\log\frac{\vartheta_{01}(v_1^{(0)} + b)\ \vartheta_{01}(v_2^{(0)} + b)}{\vartheta_{01}(v_1^{(0)} - b)\ \vartheta_{01}(v_2^{(0)} - b)},$$

und const. die Integrationsconstante bedeutet.

In den **beiden ersten** Fällen wird:

$$\alpha = \frac{h}{k}\left\{+ k\gamma\frac{\varepsilon_3 - \delta_4}{\mu}(\delta_3 - \nu)\right\} t$$

$$- \sqrt{\lambda(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)}\left\{E(\sigma) - \frac{\vartheta_{00}(s)\ \vartheta_{11}(s)}{\vartheta_{01}(s)\ \vartheta_{10}(s)} + \frac{\vartheta_{10}\ \vartheta_{01}(b)\ \vartheta_{00}(s)}{\vartheta_{00}\ \vartheta_{11}(b)\ \vartheta_{10}(s)}\cdot\frac{e^{\tau}\vartheta_{10}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{10}(s+b)}{e^{\tau}\vartheta_{00}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{00}(s+b)}\right\} + \text{const.}$$

Wobei die Formel angewendet wurde:

$$E(\sigma + K + iK') = E(\sigma) - \frac{\sin am\,\sigma\,.\,\Delta am\,\sigma}{\cos am\,\sigma} + E + i(K' - E'),$$

wo E das vollständige elliptische Integral zweiter Gattung mod. $\varkappa$, K' und E' die vollständigen Integrale erster und zweiter Gattung mod. $\varkappa'$ bedeuten.

Im **dritten** und **vierten** Falle wird:

$$\alpha = \left\{\frac{h}{k} + \frac{k\lambda}{\mu}(\varepsilon_3 - \delta_5)\ (\delta_2 - \nu)\right\} t$$

$$- \sqrt{\lambda(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)} \left\{ E(\sigma) + \frac{\vartheta_{10}\,\vartheta_{11}(b)\,\vartheta_{11}(s)}{\vartheta_{00}\,\vartheta_{01}(b)\,\vartheta_{01}(s)} \; \frac{e^{\tau}\,\vartheta_{11}(s-b) + e^{-\tau}\,\vartheta_{11}(s+b)}{e^{\tau}\,\vartheta_{01}(s-b) - e^{-\tau}\,\vartheta_{01}(s+b)} \right\} + \text{const.}$$

Die Constante ist in allen vier Fällen gleich dem Werte der geschweiften Klammer, wenn man in derselben σ durch σ_0 ersetzt. — Schreiten wir nun zur Darstellung der einzelnen Fälle:

Erster Fall: $\delta_1 < x_1 < \delta_4 < \delta_2 < x_2 < \delta_5 = \delta_3.$

$\varepsilon_1 < x_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3 < x_2 < \varepsilon.$

Dieser Fall tritt ein, falls $n = 0$, $0 < l < 1$.

Es ist: $\delta_4 = l\delta_2 + m\delta_1 = \delta_1 + l(\delta_2 - \delta_1) = \delta_2 - m(\delta_2 - \delta_1) = \frac{\mu}{N} + \nu.$

Man setze: $\delta_1 - x = (\delta_1 - \delta_4)\,\xi^2$, $\qquad \varkappa^2 = \frac{\delta_4 - \delta_1}{\delta_2 - \delta_1} = l,$

$\delta_4 - x = (\delta_4 - \delta_1)\,\eta^2$, $\qquad a^2 = \frac{\delta_2 - \delta_1}{\delta_3 - \delta_1} = \frac{\frac{1}{A} - \frac{1}{B}}{\frac{1}{A} - \frac{1}{C}},$

$\delta_2 - x = (\delta_2 - \delta_1)\,\zeta^2$,

$\delta_3 - x = (\delta_3 - \delta_1)\,\psi^2$; $\qquad \varkappa^2 a^2 = \frac{\delta_4 - \delta_1}{\delta_3 - \delta_1}.$

Dann wird, falls man der Kürze halber schreibt: $i, k = \delta_i\,\delta_k$.

$$\alpha_1 = \frac{4,1}{\sqrt{1,2\,.\,1,3}}\,\xi_1\,\xi_2, \quad \alpha_2 = i\,\frac{1,2}{\sqrt{2,3}}\,\zeta_1\,\zeta_2, \quad \alpha_3 = \frac{1,3}{\sqrt{2,3}}\,\psi_1\,\psi_2,$$

$$\beta_1 = i\sqrt{\frac{3,1}{3,4}}\,\frac{1}{\xi_1^2 - \xi_1^2}\left\{\xi_1\,\eta_1\,\zeta_2\,\psi_2^2 - \xi_2\,\eta_2\,\zeta_1\,\psi_1^2\right\},$$

$$\beta_2 = \sqrt{\frac{3,1\,.\,3,1}{3,2\,.\,3,4}}\,\frac{1}{\xi_1^2 - \xi_2^2}\left\{\xi_2\,\eta_1\,\zeta_1\,\psi_2^2 - \xi_1\,\eta_2\,\zeta_2\,\psi_1^2\right\},$$

$$\beta_3 = i\sqrt{\frac{2,1\,.\,3,1}{3,2\,.\,3,4}}\,\frac{\psi_1\,\psi_2}{\xi_1^2 - \xi_2^2}\left\{\xi_2\,\eta_1\,\zeta_2 - \xi_1\,\eta_2\,\zeta_1\right\},$$

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{3,1}{3,4}}\,\frac{\psi_1\,\psi_2}{\xi_1^2 - \xi_2^2}\left\{\xi_1\,\eta_2\,\zeta_2 - \xi_2\,\eta_1\,\zeta_1\right\},$$

$$\gamma_2 = i\sqrt{\frac{3,1\,.\,3,1}{3,2\,.\,3,4}}\,\frac{\psi_1\,\psi_2}{\xi_1^2 - \xi_2^2}\left\{\xi_2\,\eta_2\,\zeta_1 - \xi_1\,\eta_1\,\zeta_2\right\},$$

$$\gamma_3 = \sqrt{\frac{2,1\,.\,3,1}{3,2\,.\,3,4}}\,\frac{1}{\xi_1^2 - \xi_2^2}\left\{\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2\,\psi_1^2 - \xi_1\,\eta_1\,\zeta_1\,\psi_2^2\right\}.$$

$$u = \frac{k}{A_1}\cdot\alpha_1, \quad v = \frac{k}{B_1}\,.\,\alpha_2, \quad w = \frac{k}{C_1}\,.\,\alpha_3.$$

$$p = ik\sqrt{\frac{C_1 - B_1}{A B_1 C_1} \cdot \frac{3,1}{3,2}}\ \frac{\psi_1\ \psi_2}{\xi_1^2 - \xi_2^2}\left\{\ \xi_1\ \eta_1\ \zeta_2 - \xi_2\ \eta_2\ \zeta_1\ \right\},$$

$$q = k\sqrt{\frac{C_1 - A_1}{B C_1 A_1} \cdot \frac{3,1}{3,2}}\ \frac{\psi_1\ \psi_2}{\xi_1^2 - \xi_2^2}\left\{\ \xi_2\ \eta_1\ \zeta_1 - \xi_1\ \eta_2\ \zeta_2\ \right\},$$

$$r = ik\sqrt{\frac{B_1 - A_1}{C A_1 B_1} \cdot \frac{3,1}{3,2}}\ \frac{1}{\xi_1^2 - \xi_2^2}\left\{\ \xi_2\ \eta_1\ \zeta_2\ \psi_1^2 - \xi_1\ \eta_2\ \zeta_1\ \psi_2^2\ \right\}.$$

$$p' = ik\sqrt{\lambda\ .\ 2,1}\ \frac{3,1}{\mu}\ \frac{\psi_1\ \psi_2}{\xi_1^2 - \xi_2^2}\left\{\ \xi_2\ \eta_1\ \zeta_2 - \xi_1\ \eta_2\ \zeta_1\ \right\},$$

$$q' = \frac{k\sqrt{\lambda}}{\mu}\ \frac{\nu - \delta_4}{\sqrt{3,4}}\ .\ 3,1\ .\ \psi_1\ \psi_2, \quad r' = \frac{ik\sqrt{\lambda}}{\mu}\ \frac{\nu - \delta_3}{\sqrt{3,4}}\ .\ 4,1\ .\ \eta_1\ \eta_2.$$

$$\beta = i\sqrt{\lambda}\frac{4,1}{\sqrt{3,4}}\ \eta_1\ \eta_2, \qquad \gamma = \sqrt{\lambda}\frac{3,1}{\sqrt{3,4}}\ \psi_1\ .\ \psi_2.$$

Führt man in diese Ausdrücke Thetafunctionen ein, so wird, wenn:

$$\sigma = \sigma_0 + k\sqrt{\frac{B_1 - A_1}{C\ B_1\ A_1}}\ .\ t$$

$$\tau = \tau_0 + k\sqrt{C\ \frac{B_1 - A_1}{B_1\ A_1}}\left\{\frac{Z(\omega)}{C} + \frac{1}{A}\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{N}\right)\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{B}\right)}{\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right)}}\right\}t$$

$$\frac{1}{N} = \frac{l}{B} + \frac{m}{A}, \quad \omega = \arg\ \mathrm{sinam}\sqrt{\frac{\frac{1}{A} - \frac{1}{B}}{\frac{1}{A} - \frac{1}{C}}}$$

$$\alpha = \frac{k}{A_1}\ t - \sqrt{C\left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{B_1}\right)}\left\{\ E(\sigma) - \frac{\vartheta_{11}(s)\ \vartheta_{00}(s)}{\vartheta_{01}(s)\ \vartheta_{10}(s)}\right.$$

$$\left. + \frac{\vartheta_{10}\ \vartheta_{01}(b)\ \vartheta_{00}(s)}{\vartheta_{00}\ \vartheta_{11}(b)\ \vartheta_{10}(s)}\cdot\ \frac{e^{\tau}\vartheta_{10}(s - b) - e^{-\tau}\vartheta_{10}(s + b)}{e^{\tau}\vartheta_{00}(s - b) + e^{-\tau}\vartheta_{00}(s + b)}\right\} + \text{const.}$$

$$\beta = \sqrt{1C\left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{B_1}\right)}\ \frac{\vartheta_{01}}{\vartheta_{10}}\ \frac{e^{\tau}\vartheta_{11}(s - b) - e^{-\tau}\vartheta_{11}(s + b)}{e^{\tau}\vartheta_{00}(s - b) + e^{-\tau}\vartheta_{00}(s + b)},$$

$$\gamma = 2\sqrt{A\left(\frac{1}{B_1} - \frac{1}{C_1}\right)}\ \frac{1}{\vartheta_{10}}\ \frac{\vartheta_{10}(b)\ \vartheta_{00}(s)}{e^{\tau}\vartheta_{00}(s - b) + e^{-\tau}\vartheta_{00}(s + b)}.$$

$$\alpha_1 = \frac{\vartheta_{10}}{\vartheta_{00}} \frac{e^{\tau}\vartheta_{10}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{10}(s+b)}{e^{\tau}\vartheta_{00}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{00}(s+b)},$$

$$\alpha_2 = \frac{\vartheta_{01}}{\vartheta_{00}} \frac{e^{\tau}\vartheta_{01}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{01}(s+b)}{e^{\tau}\vartheta_{00}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{00}(s+b)},$$

$$\alpha_3 = \frac{2}{\vartheta_{00}} \frac{\vartheta_{00}(b)\,\vartheta_{00}(s)}{e^{\tau}\vartheta_{00}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{00}(s+b)};$$

$$\beta_1 = \frac{\vartheta_{01}}{\vartheta_{00}} \frac{e^{\tau}\vartheta_{01}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{00}(s+b)}{e^{\tau}\vartheta_{00}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{00}(s+b)},$$

$$\beta_2 = \frac{\vartheta_{10}}{\vartheta_{00}} \frac{e^{\tau}\vartheta_{10}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{10}(s+b)}{e^{\tau}\vartheta_{00}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{00}(s+b)},$$

$$\beta_3 = \frac{2}{\vartheta_{00}} \frac{\vartheta_{11}(b)\,\vartheta_{11}(s)}{e^{\tau}\vartheta_{00}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{00}(s+b)};$$

$$\gamma_1 = -\frac{2}{\vartheta_{00}} \frac{\vartheta_{10}(b)\,\vartheta_{10}(s)}{e^{\tau}\vartheta_{00}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{00}(s+b)},$$

$$\gamma_2 = \frac{2}{\vartheta_{00}} \frac{\vartheta_{01}(b)\,\vartheta_{01}(s)}{e^{\tau}\vartheta_{00}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{00}(s+b)},$$

$$\gamma_3 = \frac{e^{\tau}\vartheta_{00}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{00}(s+b)}{e^{\tau}\vartheta_{00}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{00}(s+b)}.$$

$$u = \frac{k}{A_1}\alpha_1, \quad v = \frac{k}{B_1}\alpha_2, \quad w = \frac{k}{C_1}\alpha_3.$$

$$p = 2k\sqrt{\frac{C_1 - B_1}{A B_1 C_1}}\,\frac{\vartheta_{10}}{\vartheta_{00}^2}\,\frac{\vartheta_{00}(b)\,\vartheta_{01}(s)}{e^{\tau}\vartheta_{00}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{00}(s+b)},$$

$$q = 2k\sqrt{\frac{C_1 - A_1}{B C_1 A_1}}\,\frac{\vartheta_{01}}{\vartheta_{10}\,\vartheta_{00}}\,\frac{\vartheta_{00}(b)\,\vartheta_{10}(b)}{e^{\tau}\vartheta_{00}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{00}(s+b)},$$

$$r = 2k\sqrt{\frac{B_1 - A_1}{C A_1 B_1}}\,\frac{\vartheta_{01}\,\vartheta_{10}}{\vartheta_{00}^2}\,\frac{e^{\tau}\vartheta_{11}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{11}(s+b)}{e^{\tau}\vartheta_{00}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{00}(s+b)}.$$

$$p' = 2k\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)\sqrt{C\left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{B_1}\right)}\;\frac{\vartheta_{01}}{\vartheta_{00}^2}\;\frac{\vartheta_{10}(b)\,\vartheta_{11}(s)}{e^{\tau}\vartheta_{00}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{00}(s+b)},$$

$$q' = 2k\,\frac{1}{N}\sqrt{B\left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{C_1}\right)}\;\frac{1}{\vartheta_{10}}\;\frac{\vartheta_{10}(b)\,\vartheta_{00}(s)}{e^{\tau}\vartheta_{00}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{11}(s+b)},$$

$$r' = k\,\frac{1}{C}\sqrt{\lambda\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{A}\right)}\;\frac{\vartheta_{01}}{\vartheta_{10}}\;\frac{e^{\tau}\vartheta_{11}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{11}(s+b)}{e^{\tau}\vartheta_{00}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{00}(s+b)}.$$

Zweiter Fall.

$$\delta_1 < x_1 < \delta_2 < \delta_4 < x_2 < \delta_5 = \delta_3$$
$$\varepsilon_1 < x_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3 < x_2 < \varepsilon$$

$$n = 0, \quad 1 < l < \frac{\frac{1}{A} - \frac{1}{C}}{\frac{1}{A} - \frac{1}{B}}.$$

$$\delta_4 = \frac{\mu}{N} + \nu = l\,\delta_2 + m\,\delta_1.$$

Man setze:

$$\delta_1 - x = (\delta_1 - \delta_2)\,\xi^2, \qquad \varkappa^2 = \frac{\delta_2 - \delta_1}{\delta_4 - \delta_1} = \frac{1}{l},$$

$$\delta_2 - x = (\delta_2 - \delta_1)\,\eta^2, \qquad a^2 = \frac{\delta_4 - \delta_1}{\delta_3 - \delta_1},$$

$$\delta_4 - x = (\delta_4 - \delta_1)\,\zeta^2,$$

$$\delta_3 - x = (\delta_3 - \delta_1)\,\psi^2; \qquad \varkappa^2 a^2 = \frac{\delta_2 - \delta_1}{\delta_3 - \delta_1} = \frac{\frac{1}{A} - \frac{1}{B}}{\frac{1}{A} - \frac{1}{C}}.$$

wo:

$$0 < \xi_1^2 < 1 < \frac{1}{\varkappa^2} = l < \xi_2^2 < \frac{1}{\varkappa^2 a^2}.$$

Es wird:

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{2,1}{3,1}}\;\xi_1 \,.\, \xi_2, \qquad \alpha_2 = i\sqrt{\frac{2,1}{3,2}}\;.\;\eta_1\,\eta_2, \qquad \alpha_3 = \sqrt{\frac{3,1}{3,2}}\;.\;\zeta_1 \,.\, \zeta_2;$$

$$\beta_1 = i\sqrt{\frac{4,1\,.\,3,1}{2,1\,.\,3,4}}\;\frac{1}{\xi_1^2 - \xi_2^2}\left\{\xi_1\,\eta_2\,\zeta_1\,\psi_2^2 - \xi_2\,\eta_1\,\zeta_2\,\psi_1^2\right\},$$

$$\beta_2 = \sqrt{\frac{4,1\,.\,3,1\,.\,3,1}{3,2\,.\,3,4\,.\,2,1}}\;\frac{1}{\xi_1^2 - \xi_2^2}\left\{\xi_2\,\eta_1\,\zeta_1\,\psi_2^2 - \xi_1\,\eta_2\,\zeta_2\,\psi_1^2\right\},$$

$$\beta_3 = i\sqrt{\frac{4,1\,.\,3,1}{3,2\,.\,3,4}}\;\frac{\psi_1\,\psi_2}{\xi_1^2 - \xi_2^2}\left\{\xi_2\,\eta_2\,\zeta_1 - \xi_1\,\eta_1\,\zeta_2\right\};$$

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{4,1\,.\,3,1}{2,1\,.\,3,4}\;\frac{\psi_1\,\psi_2}{\xi_1^2-\xi_2^2}}\;\left\{\xi_1\,\eta_2\,\zeta_2 - \xi_2\,\eta_1\,\zeta_1\right\},$$

$$\gamma_2 = i\sqrt{\frac{4,1\,.\,3,1\,.\,3,1}{3,2\,.\,3,4\,.\,2,1}\;\frac{\psi_1\,\psi_2}{\xi_1^2-\xi_2^2}}\;\left\{\xi_2\,\eta_1\,\zeta_2 - \xi_1\,\eta_2\,\zeta_1\right\},$$

$$\gamma_3 = \sqrt{\frac{4,1\,.\,3,1}{3,2\,.\,3,4}\;\frac{1}{\xi_1^2-\xi_2^2}}\;\left\{\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2\,\psi_1^2 - \xi_1\,\eta_1\,\zeta_1\,\psi_2^2\right\}.$$

$$p = ik\sqrt{\frac{C_1-B_1}{AB_1C_1}\;\frac{4,1\,.\,3,1}{2,1\,.\,3,2}\;\frac{\psi_1\,\psi_2}{\xi_1^2-\xi_2^2}}\;\left\{\xi_1\,\eta_2\,\zeta_1 - \xi_2\,\eta_1\,\zeta_2\right\},$$

$$q = k\sqrt{\frac{C_1-A_1}{BC_1A_1}\;\frac{4,1\,.\,3,1}{2,1\,.\,3,2}\;\frac{\psi_1\,\psi_2}{\xi_1^2-\xi_2^2}}\;\left\{\xi_2\,\eta_1\,\zeta_1 - \xi_1\,\eta_2\,\zeta_2\right\},$$

$$r = ik\sqrt{\frac{B_1-A_1}{CA_1B_1}\;\frac{4,1\,.\,3,1}{2,1\,.\,3,2}\;\frac{1}{\xi_1^2-\xi_2^2}}\;\left\{\xi_2\,\eta_2\,\zeta_1\,\psi_1^2 - \xi_1\,\eta_1\,\zeta_2\,\psi_2^2\right\}.$$

$$p' = ik\sqrt{\lambda\,.\,4,1}\;\frac{3,1}{\mu}\;\frac{\psi_1\,\psi_2}{\xi_1^2-\xi_2^2}\;\left\{\xi_2\,\eta_2\,\zeta_1 - \xi_1\,\eta_1\,\zeta_2\right\},$$

$$q' = \frac{k\sqrt{\lambda}}{\mu}\;\frac{\nu-\delta_4}{\sqrt{3,4}}\;3,1\,.\,\psi_1\,\psi_2,\quad r' = \frac{ik\sqrt{\lambda}}{\mu}\;\frac{\nu-\delta_3}{\sqrt{3,4}}\;4,1\,.\,\zeta_1\,\zeta_2.$$

$$\beta = i\sqrt{\lambda}\,\frac{4,1}{\sqrt{3,4}}\,\zeta_1\,\zeta_2,\qquad \gamma = \sqrt{\lambda}\,\frac{3,1}{\sqrt{3,4}}\,\psi_1\,\psi_2.$$

Es ist: $\sigma = \sigma_0 + k\sqrt{\frac{1}{C}\left(\frac{1}{A_1}-\frac{1}{B_1}\right)}\,.\,t,$

$$\tau = \tau_0 + k\sqrt{lC\left(\frac{1}{A_1}-\frac{1}{B_1}\right)}\left\{\frac{Z(\omega)}{C} + \frac{1}{A}\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{N}\right)\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{B}\right)}{\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{A}\right)\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{A}\right)}}\right\}t;$$

$$\frac{1}{N} = \frac{l}{B} + \frac{m}{A},\quad \omega = \arg\,\mathrm{sinam}\sqrt{\frac{\frac{1}{A}-\frac{1}{N}}{\frac{1}{A}-\frac{1}{C}}}.$$

Es wird: $$\alpha = \frac{h}{k}\,t - \sqrt{lC\left(\frac{1}{A_1}-\frac{1}{B_1}\right)}\left\{E(\sigma) - \frac{\vartheta_{11}(s)\,\vartheta_{00}(s)}{\vartheta_{01}(s)\,\vartheta_{10}(s)}\right.$$
$$\left. + \frac{\vartheta_{10}\,\vartheta_{01}(b)\,\vartheta_{00}(s)}{\vartheta_{00}\,\vartheta_{11}(b)\,\vartheta_{10}(s)}\,.\,\frac{e^{\tau}\vartheta_{10}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{10}(s+b)}{e^{\tau}\vartheta_{00}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{00}(s+b)}\right\} + \text{const.}$$

$$\beta = \sqrt{1C\left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{B_1}\right)}\,\frac{\vartheta_{01}}{\vartheta_{00}}\,\frac{e^{\tau}\vartheta_{01}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{01}(s+b)}{e^{\tau}\vartheta_{00}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{00}(s+b)};$$

$$\gamma = 2\sqrt{A\left(\frac{1}{B_1} - \frac{1}{C_1}\right)}\,\frac{\vartheta_{01}\,\vartheta_{10}^2(b)}{\vartheta_{10}^2\,\vartheta_{01}(b)}\,\frac{\vartheta_{00}(s)}{e^{\tau}\vartheta_{00}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{00}(s+b)}.$$

$$\alpha_1 = \frac{\vartheta_{00}}{\vartheta_{10}}\,\frac{e^{\tau}\vartheta_{10}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{10}(s+b)}{e^{\tau}\vartheta_{00}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{00}(s+b)},$$

$$\alpha_2 = \frac{\vartheta_{01}}{\vartheta_{10}}\,\frac{e^{\tau}\vartheta_{11}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{11}(s+b)}{e^{\tau}\vartheta_{00}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{00}(s+b)},$$

$$\alpha_3 = \frac{2}{\vartheta_{10}}\,\frac{\vartheta_{10}(b)\,\vartheta_{00}(s)}{e^{\tau}\vartheta_{00}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{00}(s+b)};$$

$$\beta_1 = \frac{\vartheta_{01}}{\vartheta_{10}}\,\frac{e^{\tau}\vartheta_{11}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{11}(s+b)}{e^{\tau}\vartheta_{00}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{00}(s+b)},$$

$$\beta_2 = \frac{-\vartheta_{00}}{\vartheta_{10}}\,\frac{e^{\tau}\vartheta_{10}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{10}(s+b)}{e^{\tau}\vartheta_{00}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{00}(s+b)},$$

$$\beta_3 = \frac{2}{\vartheta_{10}}\,\frac{\vartheta_{11}(b)\,\vartheta_{01}(s)}{e^{\tau}\vartheta_{00}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{00}(s+b)};$$

$$\gamma_1 = \frac{2}{\vartheta_{10}}\,\frac{\vartheta_{00}(b)\,\vartheta_{10}(s)}{e^{\tau}\vartheta_{00}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{00}(s+b)},$$

$$\gamma_2 = \frac{2}{\vartheta_{10}}\,\frac{\vartheta_{01}(b)\,\vartheta_{11}(s)}{e^{\tau}\vartheta_{00}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{00}(s+b)},$$

$$\gamma_3 = \frac{e^{\tau}\vartheta_{00}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{00}(s+b)}{e^{\tau}\vartheta_{00}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{00}(s+b)}.$$

$$u = \frac{k}{A_1}\,\alpha_1,\quad v = \frac{k}{B_1}\,\alpha_2,\quad w = \frac{k}{C_1}\,\alpha_3.$$

$$p = 2k\sqrt{\frac{C_1 - B_1}{A B_1 C_1}\cdot\frac{-m}{l}}\,\frac{1}{\vartheta_{00}}\,\frac{\vartheta_{10}(b)\,\vartheta_{11}(s)}{e^{\tau}\vartheta_{00}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{00}(s+b)},$$

$$q = 2k\sqrt{\frac{C_1 - A_1}{B C_1 A_1} \cdot \frac{-m}{l}}\ \frac{1}{\vartheta_{01}}\ \frac{\vartheta_{10}(b)\ \vartheta_{11}(s)}{e^{\tau}\vartheta_{00}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{00}(s+b)},$$

$$r = k\sqrt{\frac{B_1 - A_1}{C A_1 B_1} \cdot \frac{-m}{l}}\ \frac{\vartheta_{01}}{\vartheta_{00}}\ \frac{e^{\tau}\vartheta_{01}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{01}(s+b)}{e^{\tau}\vartheta_{00}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{00}(s+b)}.$$

$$p' = 2k\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)\sqrt{\lambda\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{B}\right)}\ \frac{\vartheta_{10}(b)\ \vartheta_{00}(b)}{\vartheta_{10}\ .\ \vartheta_{01}(b)}\ \frac{\vartheta_{01}(s)}{e^{\tau}\vartheta_{00}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{00}(s+b)},$$

$$q' = 2k\ \frac{1}{N}\sqrt{A\left(\frac{1}{B_1} - \frac{1}{C_1}\right)}\ \frac{\vartheta_{01}(b)}{\vartheta_{01}}\ \frac{\vartheta_{00}(s)}{e^{\tau}\vartheta_{00}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{00}(s+b)},$$

$$r' = k\ \frac{1}{C}\sqrt{\lambda\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{A}\right)}\ \frac{\vartheta_{01}}{\vartheta_{00}}\ \frac{e^{\tau}\vartheta_{01}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{01}(s+b)}{e^{\tau}\vartheta_{00}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{00}(s+b)}.$$

Dritter Fall.

$$\delta_1 < x_1 < \delta_4 = \delta_2 < x_2 < \delta_5 < \delta_3.$$
$$\varepsilon_1 < x_1 < \varepsilon < x_2 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3.$$

$$\frac{\frac{1}{B} - \frac{1}{A}}{\frac{1}{C} - \frac{1}{A}} < l < 1, \quad m = 0, \quad 0 = n < \frac{\frac{1}{C} - \frac{1}{B}}{\frac{1}{C} - \frac{1}{A}}$$

$$\delta_5 = \frac{\mu}{M} + \nu = n\delta_1 + l\delta_3.$$

Man setze: $\delta_1 - x = (\delta_1 - \delta_5)\ \xi^2$, $\qquad \varkappa^2 = \dfrac{\delta_5 - \delta_1}{\delta_3 - \delta_1} = l,$

$$\delta_5 - x = (\delta_5 - \delta_1)\ \eta^2, \qquad a^2 = \frac{\delta_3 - \delta_1}{\delta_2 - \delta_1} = \frac{\frac{1}{C} - \frac{1}{A}}{\frac{1}{B} - \frac{1}{A}},$$

$$\delta_3 - x = (\delta_3 - \delta_1)\ \zeta^2,$$

$$\delta_2 - x = (\delta_2 - \delta_1)\ \psi^2; \qquad a = \sin am\ (\omega + iK').$$

$$0 < \xi_1^2 < \frac{1}{\varkappa^2\ a^2} < \xi_2^2 < 1 < \frac{1}{\varkappa^2}.$$

Dann wird:

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{5,1}{2,1\ .\ 3,1}}\ \xi_1\ \xi_2, \quad \alpha_2 = i\sqrt{\frac{2,1}{3,2}}\ \psi_1\ \psi_2, \quad \alpha_3 = \sqrt{\frac{3,1}{3,2}}\ \zeta_1\ \zeta_2;$$

$$\beta_1 = i\sqrt{\frac{2,\,1}{5,\,2}}\;\frac{\psi_1\,\psi_2}{\xi_1^2-\xi_2^2}\left\{\xi_1\,\eta_2\,\zeta_2 - \xi_2\,\eta_1\,\zeta_1\right\},$$

$$\beta_2 = \sqrt{\frac{2,\,1\,.\,3,\,1}{5,\,2\,.\,3,\,2}}\;\frac{1}{\xi_1^2-\xi_2^2}\left\{\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2\,\psi_1^2 - \xi_1\,\eta_1\,\zeta_1\,\psi_2^2\right\},$$

$$\beta_3 = i\sqrt{\frac{2,\,1\,.\,2,\,1}{5,\,2\,.\,3,\,2}}\;\frac{\psi_1\,\psi_2}{\xi_1^2-\xi_2^2}\left\{\xi_2\,\eta_2\,\zeta_1 - \xi_1\,\eta_1\,\zeta_2\right\},$$

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{2,\,1}{5,\,2}}\;\frac{1}{\xi_1^2-\xi_2^2}\left\{\xi_1\,\eta_1\,\zeta_2\,\psi_2^2 - \xi_2\,\eta_2\,\zeta_1\,\psi_1^2\right\},$$

$$\gamma_2 = i\sqrt{\frac{2,\,1\,.\,3,\,1}{5,\,2\,.\,3,\,2}}\;\frac{\psi_1\,\psi_2}{\xi_1^2-\xi_2^2}\left\{\xi_2\,\eta_1\,\zeta_2 - \xi_1\,\eta_2\,\zeta_1\right\},$$

$$\gamma_3 = \sqrt{\frac{2,\,1\,.\,2,\,1}{5,\,2\,.\,3,\,2}}\;\frac{1}{\xi_1^2-\xi_2^2}\left\{\xi_2\,\eta_1\,\zeta_1\,\psi_2^2 - \xi_1\,\eta_2\,\zeta_2\,\psi_1^2\right\}.$$

$$p = ik\sqrt{\frac{C_1 - B_1}{A\,B_1\,C_1}\,.\,\frac{2,\,1}{3,\,2}}\;\frac{\psi_1\,\psi_2}{\xi_1^2-\xi_2^2}\left\{\xi_1\,\eta_1\,\zeta_2 - \xi_2\,\eta_2\,\zeta_1\right\},$$

$$q = k\sqrt{\frac{C_1 - A_1}{B\,C_1\,A_1}\;\frac{2,\,1}{3,\,2}}\;\frac{1}{\xi_1^2-\xi_2^2}\left\{\xi_2\,\eta_1\,\zeta_2\,\psi_1^2 - \xi_1\,\eta_2\,\zeta_1\,\psi_2^2\right\}.$$

$$r = ik\sqrt{\frac{B_1 - A_1}{C\,A_1\,B_1}\,.\,\frac{2,\,1}{3,\,2}}\;\frac{\psi_1\,\psi_2}{\xi_1^2-\xi_2^2}\left\{\xi_2\,\eta_1\,\zeta_1 - \xi_1\,\eta_2\,\zeta_2\right\},$$

$$p' = ik\,\frac{\sqrt{\lambda}}{\mu}\,.\,2,\,1\,.\sqrt{3,\,1}\;\frac{\psi_1\,\psi_2}{\xi_1^2-\xi_2^2}\left\{\xi_2\,\eta_1\,\zeta_2 - \xi_1\,\eta_2\,\zeta_1\right\},$$

$$q' = \frac{k\sqrt{\lambda}}{\mu}\;5,\,1\,.\,\frac{\nu-\delta_2}{\sqrt{5,\,2}}\;\eta_1\,\eta_2, \qquad r' = \frac{ik\sqrt{\lambda}}{\mu}\;2,\,1\,.\,\frac{\nu-\delta_5}{\sqrt{5,\,2}}\;\psi_1\,\psi_2,$$

$$\beta = i\sqrt{\frac{\lambda}{5,\,2}}\;2,\,1\,.\,\psi_1\,\psi_2, \qquad \gamma = \sqrt{\frac{\lambda}{5,\,2}}\,.\,5,\,1\;\eta_1\,\eta_2.$$

Bedeutet: $\sigma = \sigma_0 + k\sqrt{\frac{C_1 - A_1}{B\;C_1\;A_1}}\,.\,t,$

$$\tau = \tau_0 + k\sqrt{B\left(\frac{1}{A_1}-\frac{1}{C_1}\right)}\left\{\frac{Z(\omega)}{B} + \left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{M}\right)\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{C}\right)}{\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{A}\right)\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{A}\right)}}\right\}t;$$

$$\omega = -\,iK' + \arg\sin \operatorname{am} \sqrt{\frac{\frac{1}{C} - \frac{1}{A}}{\frac{1}{B} - \frac{1}{A}}},$$

so wird: $$\alpha = \frac{k}{A_1}\, t - \sqrt{B\left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{C_1}\right)}\left\{ E(\sigma) \right.$$

$$\left. + \frac{\vartheta_{10}\,\vartheta_{11}(b)\,\vartheta_{11}(s)}{\vartheta_{00}\,\vartheta_{01}(b)\,\vartheta_{01}(s)}\;\frac{e^{\tau}\vartheta_{11}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{11}(s+b)}{e^{\tau}\vartheta_{01}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{01}(s+b)}\right\} + \text{const.}$$

$$\beta = 2\sqrt{A\left(\frac{1}{B_1} - \frac{1}{C_1}\right)}\;\frac{1}{\vartheta_{01}}\;\frac{\vartheta_{11}(b)\,\vartheta_{11}(s)}{e^{\tau}\vartheta_{01}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{01}(s+b)};$$

$$\gamma = \sqrt{B\left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{C_1}\right)}\;\frac{\vartheta_{10}\,\vartheta_{01}}{\vartheta_{00}^2}\;\frac{e^{\tau}\vartheta_{10}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{10}(s+b)}{e^{\tau}\vartheta_{01}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{01}(s+b)}.$$

$$\alpha_1 = \frac{\vartheta_{10}}{\vartheta_{00}}\;\frac{e^{\tau}\vartheta_{11}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{11}(s+b)}{e^{\tau}\vartheta_{01}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{01}(s+b)},$$

$$\alpha_2 = \frac{2}{\vartheta_{00}}\;\frac{\vartheta_{10}(b)\,\vartheta_{11}(s)}{e^{\tau}\vartheta_{01}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{01}(s+b)},$$

$$\alpha_3 = \frac{\vartheta_{01}}{\vartheta_{00}}\;\frac{e^{\tau}\vartheta_{00}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{00}(s+b)}{e^{\tau}\vartheta_{01}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{01}(s+b)};$$

$$\beta_1 = \frac{2}{\vartheta_{00}}\;\frac{\vartheta_{00}(b)\,\vartheta_{01}(s)}{e^{\tau}\vartheta_{01}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{01}(s+b)},$$

$$\beta_2 = \frac{e^{\tau}\vartheta_{01}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{01}(s+b)}{e^{\tau}\vartheta_{01}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{01}(s+b)},$$

$$\beta_3 = \frac{2}{\vartheta_{00}}\;\frac{\vartheta_{11}(b)\,\vartheta_{10}(s)}{e^{\tau}\vartheta_{01}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{01}(s+b)};$$

$$\gamma_1 = \frac{\vartheta_{01}}{\vartheta_{00}}\;\frac{e^{\tau}\vartheta_{00}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{00}(s+b)}{e^{\tau}\vartheta_{01}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{01}(s+b)},$$

$$\gamma_2 = \frac{2}{\vartheta_{00}} \frac{\vartheta_{11}(b)\,\vartheta_{00}(s)}{e^{\tau}\vartheta_{01}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{01}(s+b)},$$

$$\gamma_3 = \frac{\vartheta_{10}}{\vartheta_{00}} \frac{e^{\tau}\vartheta_{11}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{11}(s+b)}{e^{\tau}\vartheta_{01}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{01}(s+b)}.$$

$$u = \frac{k}{A_1}\alpha_1, \quad v = \frac{k}{B_1}\alpha_2, \quad w = \frac{k}{C_1}\alpha_3.$$

$$p = 2k\sqrt{\frac{C_1 - B_1}{A B_1 C_1}} \frac{\vartheta_{01}}{\vartheta_{00}^2} \frac{\vartheta_{10}(b)\,\vartheta_{10}(s)}{e^{\tau}\vartheta_{01}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{01}(s+b)},$$

$$q = k\sqrt{\frac{C_1 - A_1}{B C_1 A_1}} \frac{\vartheta_{01}\,\vartheta_{10}}{\vartheta_{00}^2} \frac{e^{\tau}\vartheta_{10}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{10}(s+b)}{e^{\tau}\vartheta_{01}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{01}(s+b)},$$

$$r = 2k\sqrt{\frac{B_1 - A_1}{C A_1 B_1}} \frac{\vartheta_{10}}{\vartheta_{00}^2} \frac{\vartheta_{10}(b)\,\vartheta_{01}(s)}{e^{\tau}\vartheta_{01}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{01}(s+b)}.$$

$$p' = 2k\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)\sqrt{n B\left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{C_1}\right)} \frac{\vartheta_{10}(b)\,\vartheta_{00}(b)}{\vartheta_{00}\,.\,\vartheta_{11}(b)} \cdot \frac{\vartheta_{10}(s)}{e^{\tau}\vartheta_{01}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{01}(s+b)},$$

$$q' = k\sqrt{\frac{l}{B}\left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{C_1}\right)} \frac{\vartheta_{01}}{\vartheta_{10}} \frac{e^{\tau}\vartheta_{10}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{10}(s+b)}{e^{\tau}\vartheta_{01}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{01}(s+b)},$$

$$r' = 2k\left(\frac{n}{A} + \frac{l}{C}\right)\sqrt{A\left(\frac{1}{B_1} - \frac{1}{C_1}\right)} \frac{\vartheta_{11}(b)}{\vartheta_{01}} \frac{\vartheta_{11}(s)}{e^{\tau}\vartheta_{01}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{01}(s+b)}.$$

Vierter Fall. $\delta_1 < x_1 < \delta_4 = \delta_2 < x_2 < \delta_3 < \delta_5$

$$\varepsilon_1 < x_1 < \varepsilon < x_2 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3.$$

$$1 < l < \infty, \quad m = 0, \quad -\infty < n < 0.$$

$$\delta_5 = n\delta_1 + l\delta_3, \quad \frac{1}{M} = \frac{n}{A} + \frac{l}{C}.$$

Man setze:

$$\delta_1 - x = (\delta_1 - \delta_3)\,\xi^2, \quad \varkappa^2 = \frac{\delta_3 - \delta_1}{\delta_5 - \delta_1} = \frac{1}{l},$$

$$\delta_3 - x = (\delta_3 - \delta_1)\,\eta^2,$$

$$\delta_5 - x = (\delta_5 - \delta_1)\,\zeta^2, \quad a^2 = \frac{\delta_5 - \delta_1}{\delta_2 - \delta_1} = l\,\frac{\frac{1}{A} - \frac{1}{C}}{\frac{1}{A} - \frac{1}{B}},$$

$$\delta_2 - x = (\delta_2 - \delta_1)\,\psi^2; \quad \varkappa^2 a^2 = \frac{\delta_3 - \delta_1}{\delta_2 - \delta_1}.$$

Dann wird:

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{3,\,1}{3,\,2}}\,\xi_1\,\xi_2, \qquad \alpha_2 = i\sqrt{\frac{2,\,1}{3,\,2}}\,\psi_1\,\psi_2, \qquad \alpha_3 = \sqrt{\frac{3,\,1}{3,\,2}}\,\eta_1\,\eta_2;$$

$$\beta_1 = i\sqrt{\frac{2,\,1\,.\,5,\,1}{3,\,1\,.\,5,\,2}}\,\frac{\psi_1\,\psi_2}{\xi_1^2 - \xi_2^2}\left\{\xi_1\,\eta_2\,\zeta_2 - \xi_2\,\eta_1\,\zeta_1\right\},$$

$$\beta_2 = \sqrt{\frac{2,\,1\,.\,5,\,1}{3,\,2\,.\,5,\,2}}\,\frac{1}{\xi_1^2 - \xi_2^2}\left\{\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2\,\psi_1^2 - \xi_1\,\eta_1\,\zeta_1\,\psi_2^2\right\}.$$

$$\beta_3 = i\sqrt{\frac{2,\,1\,.\,2,\,1\,.\,5,\,1}{3,\,1\,.\,3,\,2\,.\,5,\,2}}\,\frac{\psi_1\,\psi_2}{\xi_1^2 - \xi_2^2}\left\{\xi_2\,\eta_1\,\zeta_2 - \xi_1\,\eta_2\,\zeta_1\right\};$$

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{2,\,1\,.\,5,\,1}{3,\,1\,.\,5,\,2}}\,\frac{1}{\xi_1^2 - \xi_2^2}\left\{\xi_1\,\eta_2\,\zeta_1\,\psi_2^2 - \xi_2\,\eta_1\,\zeta_2\,\psi_1^2\right\},$$

$$\gamma_2 = i\sqrt{\frac{2,\,1\,.\,5,\,1}{3,\,2\,.\,5,\,2}}\,\frac{\psi_1\,\psi_2}{\xi_1^2 - \xi_2^2}\left\{\xi_2\,\eta_2\,\zeta_1 - \xi_1\,\eta_1\,\zeta_2\right\},$$

$$\gamma_3 = \sqrt{\frac{2,\,1\,.\,2,\,1\,.\,5,\,1}{3,\,1\,.\,3,\,2\,.\,5,\,2}}\,\frac{1}{\xi_1^2 - \xi_2^2}\left\{\xi_2\,\eta_1\,\zeta_1\,\psi_2^2 - \xi_1\,\eta_2\,\zeta_2\,\psi_1^2\right\};$$

$$p = ik\sqrt{\frac{C_1 - B_1}{A\,B_1\,C_1}\,\frac{2,\,1\,.\,5,\,1}{3,\,1\,.\,3,\,2}}\,\frac{\psi_1\,\psi_2}{\xi_1^2 - \xi_2^2}\left\{\xi_1\,\eta_2\,\zeta_1 - \xi_2\,\eta_1\,\zeta_2\right\},$$

$$q = k\sqrt{\frac{C_1 - A_1}{B\,C_1\,A_1}\,\frac{2,\,1\,.\,5,\,1}{3,\,1\,.\,3,\,2}}\,\frac{1}{\xi_1^2 - \xi_2^2}\left\{\xi_2\,\eta_2\,\zeta_1\,\psi_1^2 - \xi_1\,\eta_1\,\zeta_2\,\psi_2^2\right\},$$

$$r = ik\sqrt{\frac{B_1 - A_1}{C\,A_1\,B_1}\,\frac{2,\,1\,.\,5,\,1}{3,\,1\,.\,3,\,2}}\,\frac{\psi_1\,\psi_2}{\xi_1^2 - \xi_2^2}\left\{\xi_2\,\eta_1\,\zeta_1 - \xi_1\,\eta_2\,\zeta_2\right\};$$

$$p' = ik\sqrt{\lambda\,.\,5,\,1\,\frac{2,\,1}{\mu}}\,\frac{\psi_1\,\psi_2}{\xi_1^2 - \xi_2^2}\left\{\xi_2\,\eta_2\,\zeta_1 - \xi_1\,\eta_1\,\zeta_2\right\},$$

$$q' = k\,\frac{\sqrt{\lambda}}{\mu}\,\frac{\nu - \delta_2}{\sqrt{5,\,2}}\,5,\,1\,.\,\zeta_1\,\zeta_2, \quad r' = ik\,\frac{\sqrt{\lambda}}{\mu}\,\frac{\nu - \delta_5}{\sqrt{5,\,2}}\,2,\,1\,.\,\psi_1\,\psi_2.$$

$$\beta = i\,\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{5,\,2}}\,2,\,1\,.\,\psi_1\,\psi_2, \quad \gamma = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{5,\,2}}\,5,\,1\,.\,\zeta_1\,\zeta_2.$$

Es wird ferner:

$$\sigma = \sigma_0 + k\sqrt{\frac{1}{B}\left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{C_1}\right)}\,.\,t,$$

$$\tau = \tau_0 + k\sqrt{lB\left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{C_1}\right)}\left\{\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{C}\right)\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{M}\right)}{\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{A}\right)\left(\frac{1}{M}-\frac{1}{A}\right)}}+\frac{Z(\omega)}{B}\right\}t;$$

$$\omega = -iK' + \arg\sin \operatorname{am}\sqrt{\frac{\frac{1}{A}-\frac{1}{C}}{\frac{1}{A}-\frac{1}{B}}}\,.\,l$$

und mithin: $$\alpha = \frac{h}{k}\,t - \sqrt{lB\left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{C_1}\right)}\left\{ E(\sigma) + \frac{\vartheta_{10}\,\vartheta_{11}(b)\,\vartheta_{11}(s)}{\vartheta_{00}\,\vartheta_{01}(b)\,\vartheta_{01}(s)}\;\frac{e^{\tau}\vartheta_{11}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{11}(s+b)}{e^{\tau}\vartheta_{01}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{01}(s+b)}\right\} + \text{const.}$$

$$\beta = 2\sqrt{A\left(\frac{1}{B_1} - \frac{1}{C_1}\right)}\;\frac{\vartheta_{11}(b)}{\vartheta_{01}(b)}\;\frac{\vartheta_{11}(s)}{e^{\tau}\vartheta_{01}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{01}(s+b)};$$

$$\gamma = \sqrt{lB\left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{C_1}\right)}\;\frac{e^{\tau}\vartheta_{00}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{00}(s+b)}{e^{\tau}\vartheta_{01}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{01}(s+b)}.$$

$$\alpha_1 = \frac{\vartheta_{00}}{\vartheta_{10}}\;\frac{e^{\tau}\vartheta_{11}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{11}(s+b)}{e^{\tau}\vartheta_{01}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{01}(s+b)},$$

$$\alpha_2 = \frac{2}{\vartheta_{10}}\;\frac{\vartheta_{00}(b)\,\vartheta_{11}(s)}{e^{\tau}\vartheta_{01}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{01}(s+b)},$$

$$\alpha_3 = \frac{\vartheta_{01}}{\vartheta_{10}}\;\frac{e^{\tau}\vartheta_{10}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{10}(s+b)}{e^{\tau}\vartheta_{01}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{01}(s+b)};$$

$$\beta_1 = \frac{2}{\vartheta_{10}}\;\frac{\vartheta_{10}(b)\,\vartheta_{01}(s)}{e^{\tau}\vartheta_{10}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{10}(s+b)},$$

$$\beta_2 = \frac{e^{\tau}\vartheta_{01}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{01}(s+b)}{e^{\tau}\vartheta_{01}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{01}(s+b)},$$

$$\beta_3 = \frac{2}{\vartheta_{10}}\;\frac{\vartheta_{11}(b)\,\vartheta_{00}(s)}{e^{\tau}\vartheta_{01}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{01}(s+b)};$$

UofM

$$\gamma_1 = \frac{\vartheta_{01}}{\vartheta_{10}} \frac{e^{\tau}\vartheta_{10}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{10}(s+b)}{e^{\tau}\vartheta_{01}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{01}(s+b)},$$

$$\gamma_2 = \frac{-2}{\vartheta_{10}} \frac{\vartheta_{01}(b)\,\vartheta_{10}(s)}{e^{\tau}\vartheta_{01}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{01}(s+b)},$$

$$\gamma_3 = \frac{\vartheta_{00}}{\vartheta_{10}} \frac{e^{\tau}\vartheta_{11}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{11}(s+b)}{e^{\tau}\vartheta_{01}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{01}(s+b)}.$$

$$u = \frac{k}{A_1}\alpha_1, \quad v = \frac{k}{B_1}\alpha_2, \quad w = \frac{k}{C_1}\alpha_3.$$

$$p = 2k\sqrt{\frac{C_1 - B_1}{A B_1 C_1}} \frac{\vartheta_{01}}{\vartheta_{10}^2} \frac{\vartheta_{00}(b)\,\vartheta_{00}(s)}{e^{\tau}\vartheta_{01}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{01}(s+b)},$$

$$q = k\sqrt{\frac{C_1 - A_1}{B C_1 A_1}} \frac{\vartheta_{01}\,\vartheta_{00}}{\vartheta_{10}^2} \frac{e^{\tau}\vartheta_{00}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{00}(s+b)}{e^{\tau}\vartheta_{01}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{01}(s+b)},$$

$$r = 2k\sqrt{\frac{B_1 - A_1}{C A_1 B_1}} \frac{\vartheta_{00}}{\vartheta_{10}^2} \frac{\vartheta_{00}(b)\,\vartheta_{01}(s)}{e^{\tau}\vartheta_{01}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{01}(s+b)}.$$

$$p' = k\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right)\sqrt{B\left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{C_1}\right)} \frac{\vartheta_{01}^2\,\vartheta_{10}(b)}{\vartheta_{10}^2\,\vartheta_{11}(b)} \frac{e^{\tau}\vartheta_{00}(s-b) + e^{-\tau}\vartheta_{00}(s+b)}{e^{\tau}\vartheta_{01}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{01}(s+b)},$$

$$q' = k\sqrt{\frac{1}{C}\left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{C_1}\right)} \frac{\vartheta_{00}^2}{\vartheta_{10}^2} \frac{e^{\tau}\vartheta_{00}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{00}(s+b)}{e^{\tau}\vartheta_{01}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{01}(s+b)},$$

$$r' = 2k\left(\frac{n}{A} + \frac{l}{C}\right)\sqrt{C\left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{B_1}\right)} \frac{\vartheta_{10}(b)}{\vartheta_{00}} \frac{\vartheta_{11}(s)}{e^{\tau}\vartheta_{01}(s-b) - e^{-\tau}\vartheta_{01}(s+b)}.$$

In den fünf übrigen Fällen geht je eine der beiden Hülfsveränderlichen in eine Constante über. Da sich hierdurch die allgemeinen Formeln wesentlich vereinfachen, so mögen diese Fälle zunächst gemeinschaftlich behandelt werden.

Wird eine der Veränderlichen gleich ε, so lautet die Differentialgleichung der anderen:

$$\frac{dx}{\mathfrak{R}(x)} = 2\,k\,\sqrt{\lambda}\,.\,\frac{\varepsilon - \nu}{\mu}\,.\,dt,$$

$$\text{wo: } \mathfrak{R}(x) = \sqrt{-(\varepsilon_1 - x)(\varepsilon_2 - x)(\varepsilon_3 - x)}, \qquad \varepsilon_1 < x < \varepsilon_2 < \varepsilon_3.$$

Das Integral derselben wird:

$$\int_{\varepsilon_1}^{x} \frac{dx}{\mathfrak{R}(x)} = 2k\sqrt{\lambda}\,\frac{\varepsilon - \nu}{\mu}\,.\,t,$$

falls man als Nullpunkt der Zeit einen derjenigen Zeitpunkte wählt, für welchen $x = \varepsilon_1$ ist.

Setzt man: $x - \varepsilon_1 = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\,z^2, \quad \varkappa^2 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}.$

so wird:

$$\int_{\varepsilon_1}^{x} \frac{dx}{\mathfrak{R}(x)} = \frac{2}{\sqrt{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - \varkappa^2 z^2)}},$$

$$\text{und falls } \tau = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - \varkappa^2 z^2)}}, \quad z = \sin \operatorname{am} \tau,$$

so lautet das Integral:

$$\tau = k\sqrt{\lambda(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)}\,\frac{\varepsilon - \nu}{\mu}\,.\,t.$$

Es wird:

$$\begin{aligned} x - \varepsilon_1 &= (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\sin^2\operatorname{am}\tau \\ \varepsilon_2 - x &= (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\cos^2\operatorname{am}\tau \qquad (\text{mod. } \varkappa). \\ \varepsilon_3 - x &= (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)\,\Delta^2\operatorname{am}\tau. \end{aligned}$$

5. Fall:

$$\begin{array}{lllll} & \delta_1 = x_1 = \delta_4 < \delta_2 < x_2 < \delta_5 < \delta_3 & & & \\ & \varepsilon \qquad\quad < \varepsilon_1 < x < \varepsilon_2 < \varepsilon_3 & & & \\ l = 0 & m < 1 & n < 1 & m + n = 1 & \\ & m = \dfrac{\delta_5 - \delta_2}{\delta_3 - \delta_2} & n = \dfrac{\delta_3 - \delta_5}{\delta_3 - \delta_2} & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} x - \delta_2 &= (\delta_5 - \delta_2)\sin^2\operatorname{am}\tau \qquad \tau = k\,\frac{\delta_1 - \nu}{\mu}\sqrt{\lambda(\delta_3 - \delta_2)}\,.\,t \\ \delta_5 - x &= (\delta_5 - \delta_2)\cos^2\operatorname{am}\tau \qquad = k\sqrt{\frac{1}{A}\left(\frac{1}{B_1} - \frac{1}{C_1}\right)}\,.\,t \\ \delta_3 - x &= (\delta_3 - \delta_2)\,\Delta^2\operatorname{am}\tau \qquad \varkappa^2 = m. \end{aligned}$$

Führt man diese elliptische Functionen in die oben angeführten Formeln ein, so findet man Folgendes:

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 = 0 & \alpha_2 = \sqrt{m}\sin\operatorname{am}\tau & \alpha_3 = \Delta\operatorname{am}\tau \\ \beta_1 = -1 & \beta_2 = 0 & \beta_3 = 0 \\ \gamma_1 = 0 & \gamma_2 = -\Delta\operatorname{am}\tau & \gamma_3 = \sqrt{m}\sin\operatorname{am}\tau. \end{array}$$

$$D\alpha = k\left(\frac{m}{B_1}\sin^2 am\,\tau + \frac{1}{C_1}\Delta^2 am\,\tau\right(= k\left\{\frac{1}{B_1} - \left(\frac{1}{B_1} - \frac{1}{C_1}\right)\Delta^2 am\,\tau\right\}$$

$$\alpha = \frac{k}{B_1}\,t - \sqrt{A\left(\frac{1}{B_1} - \frac{1}{C_1}\right)}\,E(\tau).$$

$$\beta = 0, \quad \gamma = \sqrt{mA\left(\frac{1}{B_1} - \frac{1}{C_1}\right)}\,.\cos am\,\tau.$$

$$u = 0, \quad v = \frac{k}{B_1}\sqrt{m}\,\sin am\,\tau, \quad w = \frac{k}{C_1}\,\Delta am\,\tau.$$

$$p = -k\sqrt{\frac{m}{A}\left(\frac{1}{B_1} - \frac{1}{C_1}\right)}\,.\cos am\,\tau, \quad q = 0, \quad r = 0.$$

6. Fall.

$$\delta_1 = x_1 = \delta_4 < \delta_2 < x_2 < \delta_3 < \delta_5$$
$$\varepsilon \quad < \varepsilon_1 < x < \varepsilon_2 < \varepsilon_3$$
$$l = 0 \qquad m > 1 \qquad n < 0 \qquad m + n = 1.$$
$$m = \frac{\delta_5 - \delta_2}{\delta_3 - \delta_2} \qquad n = \frac{\delta_3 - \delta_5}{\delta_3 - \delta_2}$$

Man setzt:

$$x - \delta_2 = (\delta_3 - \delta_2)\sin^2 am\,\tau \qquad \tau = k\sqrt{\frac{m}{A}\left(\frac{1}{B_1} - \frac{1}{C_1}\right)}\,.\,t.$$
$$\delta_3 - x = (\delta_3 - \delta_2)\cos^2 am\,\tau$$
$$\delta_5 - x = (\delta_5 - \delta_2)\,\Delta^2 am\,\tau \qquad \varkappa^2 = \frac{1}{m}$$

Es wird:

$$\alpha_1 = 0 \qquad \alpha_2 = \sin am\,\tau \qquad \alpha_3 = \cos am\,\tau$$
$$\beta_1 = 1 \qquad \beta_2 = 0 \qquad \beta_3 = 0$$
$$\gamma_1 = 0 \qquad \gamma_2 = \cos am\,\tau \qquad \gamma_3 = -\sin am\,\tau.$$

$$D\alpha = k\left\{\frac{\sin^2 am\,\tau}{B_1} + \frac{\cos^2 am\,\tau}{C_1}\right\} = k\left\{\frac{m}{B_1} + \frac{n}{C_1} - m\left(\frac{1}{B_1} - \frac{1}{C_1}\right)\Delta^2 am\,\tau\right\}$$

$$\alpha = k\left(\frac{m}{B_1} + \frac{n}{C_1}\right).\,t - \sqrt{mA\left(\frac{1}{B_1} - \frac{1}{C_1}\right)}\,E(\tau).$$

$$\beta = 0, \quad \gamma = \sqrt{mA\left(\frac{1}{B_1} - \frac{1}{C_1}\right)}\,\Delta am\,\tau.$$

$$u = 0, \quad v = \frac{k}{B_1}\sin am\,\tau, \quad w = \frac{k}{C_1}\cos am\,\tau;$$

$$p = k\sqrt{\frac{m}{A}\left(\frac{1}{B_1} - \frac{1}{C_1}\right)}\,.\,\Delta am\,\tau, \quad q = 0, \quad r = 0.$$

7. Fall.

$$\delta_1 < x_1 < \delta_4 < \delta_2 = x_2 = \delta_5 < \delta_3$$
$$\varepsilon_1 < x < \varepsilon_2 < \quad \varepsilon \quad < \varepsilon_2.$$
$$l < 1, \quad m = 0, \quad n < 1, \quad l + m = 1.$$

$$l = \frac{\delta_4 - \delta_1}{\delta_3 - \delta_1} \qquad n = \frac{\delta_3 - \delta_4}{\delta_3 - \delta_1}.$$

Man setze:

$$x - \delta_1 = (\delta_4 - \delta_1) \sin^2 \mathrm{am}\, \tau \qquad \tau = k \frac{\delta_2 - \nu}{\mu} \sqrt{\lambda (\delta_3 - \delta_1)} \,.\, t$$

$$\delta_4 - x = (\delta_4 - \delta_1) \cos^2 \mathrm{am}\, \tau \qquad = k \sqrt{\frac{1}{B}\left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{C_1}\right)} \,.\, t$$

$$\delta_3 - x = (\delta_3 - \delta_1)\, \Delta^2 \mathrm{am}\, \tau \qquad \varkappa^2 = l.$$

Es wird:

$$\alpha_1 = \sqrt{l} \,.\, \sin \mathrm{am}\, \tau \qquad \alpha_2 = 0 \qquad \alpha_3 = \Delta \mathrm{am}\, \tau$$

$$\beta_1 = - \Delta \mathrm{am}\, \tau \qquad \beta_2 = 0 \qquad \beta_3 = \sqrt{l} \,.\, \sin \mathrm{am}\, \tau$$

$$\gamma_1 = 0 \qquad \gamma_2 = -1 \qquad \gamma_3 = 0.$$

$$D\alpha = k \left\{ \frac{l}{A_1} \sin^2 \mathrm{am}\, \tau + \frac{1}{C_1} \Delta^2 \mathrm{am}\, \tau \right\} = k \left\{ \frac{l}{A_1} - \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{C_1}\right) \Delta^2 \mathrm{am}\, \tau \right\}$$

$$\alpha = \frac{k}{A_1} t - \sqrt{B \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{C_1}\right)} E(\tau)$$

$$\beta = \sqrt{lB \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{C_1}\right)} \,.\, \cos \mathrm{am}\, \tau, \qquad \gamma = 0.$$

$$u = \frac{k}{A_1} \sqrt{l} \sin \mathrm{am}\, \tau, \qquad v = 0, \qquad w = \frac{k}{C_1} \Delta \mathrm{am}\, \tau;$$

$$p = 0, \qquad q = k \sqrt{\frac{l}{B}\left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{C_1}\right)} \,.\, \cos \mathrm{am}\, \tau, \qquad r = 0.$$

8. Fall.

$$\delta_1 < x_1 < \delta_2 < \delta_4 = x_2 = \delta_3 < \delta_5$$

$$\varepsilon_1 < x < \varepsilon_2 < \varepsilon < \varepsilon_3.$$

$$l > 1 \qquad m < 0 \quad , \quad n = 0 \qquad l + m = 1.$$

$$l = \frac{\delta_5 - \delta_1}{\delta_2 - \delta_1} \qquad m = \frac{\delta_2 - \delta_5}{\delta_2 - \delta_1}.$$

Man setzt:

$$x - \delta_1 = (\delta_2 - \delta_1) \sin^2 \mathrm{am}\, \tau \qquad \tau = k \sqrt{\lambda (\delta_5 - \delta_1)} \frac{\delta_3 - \nu}{\mu} t$$

$$\delta_2 - x = (\delta_2 - \delta_1) \cos^2 \mathrm{am}\, \tau \qquad = k \sqrt{\frac{l}{C}\left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{B_1}\right)} \,.\, t$$

$$\delta_5 - x = (\delta_5 - \delta_1)\, \Delta^2 \mathrm{am}\, \tau \qquad \varkappa^2 = \frac{1}{l}.$$

Es wird:

$$\alpha_1 = \sin \mathrm{am}\, \tau \qquad \alpha_2 = \cos \mathrm{am}\, \tau \qquad \alpha_3 = 0$$

$$\beta_1 = 0 \qquad \beta_2 = 0 \qquad \beta_3 = 1$$

$$\gamma_1 = \cos \mathrm{am}\, \tau \qquad \gamma_2 = - \sin \mathrm{am}\, \tau \qquad \gamma_3 = 0.$$

$$D\alpha = k \left\{ \frac{\sin^2 \mathrm{am}\, \tau}{A_1} + \frac{\cos^2 \mathrm{am}\, \tau}{B_1} \right\} = k \left\{ \frac{l}{A_1} + \frac{m}{B_1} - l \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{B_1} \right) \Delta^2 \mathrm{am}\, \tau \right\}$$

$$\alpha = k \left(\frac{l}{A_1} + \frac{m}{B_1} \right) . t - \sqrt{lC \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{B_1} \right)}\, E(\tau)$$

$$\beta = 0, \quad \gamma = \sqrt{lC \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{B_1} \right)} . \Delta \mathrm{am}\, \tau.$$

$$u = \frac{k}{A_1} \sin \mathrm{am}\, \tau, \qquad v = \frac{k}{B_1} \cos \mathrm{am}\, \tau, \qquad w = 0.$$

$$p = 0, \qquad q = 0, \qquad r = k \sqrt{\frac{l}{C} \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{B_1} \right)}\, \Delta \mathrm{am}\, \tau.$$

In den Fällen 5 bis 8 bleibt eine Hauptaxe in unveränderlicher Richtung. Diese vier Fälle sind von denjenigen nicht wesentlich verschieden, welche Thomson und Tait beschrieben haben.

9. Fall.

$$\delta_1 < x_1 < \delta_2 < \delta_4 = x_2 = \delta_5 < \delta_3$$
$$\varepsilon_1 < x < \varepsilon_2 < \varepsilon < \varepsilon_3.$$

Alle bisher betrachteten Fälle zeichneten sich dadurch aus, dass eine der Constanten l, m, n verschwand. In diesem Falle verschwindet keine derselben, aber es besteht, abgesehen von der Beziehung

$$l + m + n = 1$$

eine zweite Gleichung zwischen diesen Grössen, diejenige nämlich, welche besagt, dass die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\frac{l}{\delta - \delta_1} + \frac{m}{\delta - \delta_2} + \frac{n}{\delta - \delta_3} = 0$$

einander gleich sind.

Diese zweite Beziehung lautet:

$$\left\{ l(\delta_2 + \delta_3) + m(\delta_3 + \delta_1) + n(\delta_1 + \delta_2) \right\}^2 = 4 \left\{ l\delta_2\delta_3 + m\delta_3\delta_1 + n\delta_1\delta_2 \right\}$$

und wenn man die Constanten des Körpers einführt:

$$\left\{ lA(B + C) + mB(C + A) + nC(A + B) \right\}^2 = 4ABC \left\{ lA + mB + nC \right\},$$

oder auch:

$$\sqrt{l \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C} \right)} - \sqrt{m \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right)} - \sqrt{n \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right)} = 0.$$

Es wird: $\delta_4 = \frac{m + n}{2} \delta_1 + \frac{n + l}{2} \delta_2 + \frac{l + m}{2} \delta_3 = \frac{\mu}{N} + \nu,$

falls: $\frac{1}{N} = \frac{m + n}{2} \frac{1}{A} + \frac{n + l}{2} \frac{1}{B} + \frac{l + m}{2} \frac{1}{C}.$

Setzt man: $x - \delta_1 = (\delta_2 - \delta_1) z^2, \quad z = \sin \mathrm{am}\, \tau,$

$$\tau = \frac{k}{N} \sqrt{B \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{C_1} \right)}\, t, \qquad \varrho = \frac{\tau}{2K},$$

$$\varkappa^2 = \frac{\frac{1}{A} - \frac{1}{B}}{\frac{1}{A} - \frac{1}{C}}, \quad \varkappa'^2 = \frac{\frac{1}{B} - \frac{1}{C}}{\frac{1}{A} - \frac{1}{C}}, \text{ so wird:}$$

$$\alpha_1 = \sqrt[4]{l}\ \frac{\vartheta_{11}(\varrho)}{\vartheta_{01}(\varrho)} \quad \alpha_2 = \sqrt[4]{-m}\ \frac{\vartheta_{10}(\varrho)}{\vartheta_{01}(\varrho)} \quad \alpha_3 = \sqrt[4]{n}\ \frac{\vartheta_{00}(\varrho)}{\vartheta_{01}(\varrho)}.$$

Man findet: $\alpha = \frac{k}{\varkappa} \left\{ \frac{\sqrt{l}}{A_1} - \frac{\varkappa' \sqrt{-m}}{B_1} \right\} t - \frac{1}{\mu^2} \sqrt{B \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{C_1} \right)}\ E(\tau).$

$$u = \frac{k}{A_1}\alpha_1, \quad v = \frac{k}{B_1}\alpha_2, \quad w = \frac{k}{C_1}\alpha_3.$$

Es wird:

$$p = k \sqrt[4]{-mn} \sqrt{\frac{C_1 - B_1}{A\, B_1\, C_1}}\ \frac{\vartheta_{11}(\varrho)}{\vartheta_{01}(\varrho)}, \quad q = k \sqrt[4]{nl} \sqrt{\frac{C_1 - A_1}{B\, C_1\, A_1}}\ \frac{\vartheta_{10}(\varrho)}{\vartheta_{01}(\varrho)},$$

$$r = k \sqrt[4]{-lm} \sqrt{\frac{B_1 - A_1}{C\, A_1\, B_1}}\ \frac{\vartheta_{00}(\varrho)}{\vartheta_{01}(\varrho)}. \quad p' = \frac{k}{\mu} \sqrt{\lambda \triangle} \cdot \sqrt[4]{-lmn}.$$

Zur Berechnung der übrigen Grössen q', r' u. s. w. sind die oben angeführten Formeln unbrauchbar. Dieselben müssen daher in ähnlicher Weise ermittelt werden, wie es im allgemeinen Falle auf Seite 10 geschehen ist.

Es ist:

$$p^2 = \frac{k^2}{A^2} \frac{\lambda}{\triangle} \cdot 3, 2 \cdot 2, 4 \cdot 3, 4 \cdot 1, x, \quad q^2 = \frac{k^2}{B^2} \frac{\lambda}{\triangle} \cdot 1, 3 \cdot 3, 4 \cdot 1, 4 \cdot 2, x,$$

$$r^2 = \frac{k^2}{C^2} \frac{\lambda}{\triangle} \cdot 2, 1 \cdot 1, 4 \cdot 2, 4 \cdot 3, x.$$

Es ergibt sich nach einigen Umformungen:

$$p^2 + q^2 + r^2 = \frac{k^2}{\mu^2} \lambda \triangle \sqrt{-lmn} + \frac{k^2 \lambda}{N^2} (\delta_4 - x),$$

so dass:

$$p^2 + q^2 + r^2 - p'^2 = q'^2 + r'^2 = \frac{k^2 \lambda}{N^2} (\delta_4 - x).$$

Differentirt man α_1, α_2, α_3, p, q, r nach der Zeit t, so wird nach mehreren Umformungen:

$$D\alpha_1 \cdot Dp + D\alpha_2 \cdot Dq + D\alpha_3 \cdot Dr = \frac{k^3 \sqrt{\triangle^3}}{\mu\, N^2} \sqrt{\triangle} \sqrt[4]{-lmn}\ (x - \nu),$$

$$\frac{D\alpha_1 \cdot Dp + D\alpha_2 \cdot Dq + D\alpha_3 \cdot Dr}{q'^2 + r'^2} = \frac{k}{\mu} \sqrt{\lambda \triangle} \sqrt[4]{-lmn}\ \frac{x - \nu}{\delta_4 - x}.$$

$$D \text{ arc tang} \frac{q'}{r'} = \frac{k}{\mu} \sqrt{\lambda \Delta} \sqrt[4]{-lmn} \; \frac{x - \nu}{\delta_4 - x},$$

$$d \text{ arc tang} \frac{q'}{r'} = \frac{1}{2} \; \frac{\sqrt{\lambda}}{\delta_4 - \nu} \sqrt[4]{-lmn} \; \frac{x - \nu}{\delta_4 - x} \cdot \frac{dx}{\mathfrak{R}(x)}.$$

Es ist: $\dfrac{x - \nu}{\delta_4 - x} = \dfrac{\delta_1 - \nu}{\delta_4 - \delta_1} + \dfrac{\delta_4 - \nu}{\delta_4 - \delta_1} \cdot \dfrac{\varkappa^2 a^2 z^2}{1 - \varkappa^2 a^2 z^2}$, wo: $a^2 = \dfrac{\delta_3 - \delta_1}{\delta_4 - \delta_1}$,

und: $\dfrac{dx}{\mathfrak{R}(x)} = \dfrac{2}{\sqrt{\delta_3 - \delta_1}} \; \dfrac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - \varkappa^2 z^2)}}.$

Mithin wird:

$$d \text{ arc tang} \frac{q'}{r'} = \frac{\sqrt{\Delta} \sqrt[4]{-lmn}}{(\delta_4 - \delta_1)\sqrt{\delta_3 - \delta_1}} \left\{ \frac{\delta_1 - \nu}{\delta_4 - \nu} + \frac{\varkappa^2 a^2 z^2}{1 - \varkappa^2 a^2 z^2} \right\} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - \varkappa^2 z^2)}},$$

da nun: $\dfrac{\sqrt{\Delta} \sqrt[4]{-lmn}}{(\delta_4 - \delta_1)\sqrt{\delta_3 - \delta_1}} = i \; \dfrac{\sqrt{1 - a^2} \sqrt{1 - \varkappa^2 a^2}}{a},$

so hat man:

$$d \text{ arc tang} \frac{q'}{r'} = \frac{\sqrt{\Delta} \sqrt[4]{-lmn}}{(\delta_4 - \delta_1)\sqrt{\delta_3 - \delta_1}} \cdot \frac{N}{A} \; \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - \varkappa^2 z^2)}}$$

$$+ \frac{\varkappa^2 \, i a \sqrt{1 - a^2} \sqrt{1 - \varkappa^2 a^2} \; z^2 \, dz}{(1 - \varkappa^2 a^2 z^2) \sqrt{(1 - z^2)(1 - \varkappa^2 z^2)}}.$$

Man setze: $a = \sin am (iv + K, \varkappa)$, da: $1 < a^2 < \dfrac{1}{\varkappa^2}$.

Durch Integration ergibt sich dann:

$$\text{arc tang} \frac{q'}{r'} = \frac{\sqrt{\Delta} \sqrt[4]{-lmn}}{(\delta_4 - \delta_1)\sqrt{\delta_3 - \delta_1}} \cdot \frac{N}{A} \cdot \tau + i \, \Pi (\tau, iv + K, \varkappa).$$

Es tritt keine Integrationsconstante hinzu, falls man über die Richtung der η Axe so verfügt, dass zur Zeit $t = 0$ keine Rotation um diese Axe stattfindet. Es kann und soll in dieser Weise über die η Axe verfügt werden.

Zwischen dieser zweiten Classe der elliptischen Transcendenten dritter Gattung, der Zetafunction und der Thetafunction besteht die Beziehung: